II Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

Д. К. Мамий
Д. А. Белов
В. А. Брагин
Л. А. Емельянов
П. А. Кожевников
С. И. Токарев

13–18 марта 2017 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Второй день. 8–9 класс

15 марта

5. В футбольном турнире участвовало 20 команд, каждая сыграла с каждой ровно один матч. За победу дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме команды набрали 554 очка. Докажите, что найдутся 7 команд, каждая из которых сыграла хотя бы один раз вничью.

Белов Д. А. по мотивам фольклора

Решение. Предположим, что 7 команд, каждая из которых хотя бы раз сыграла вничью, не найдется. Найдем максимальное число очков S, которое могут набрать в этом турнире в сумме все команды.

Матчей всего $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$. В каждом матче разыгрывается как максимум 3 очка, значит, $S = 190\cdot 3 = 570$. У нас же команды набрали 554 очка. Поскольку при ничье в матче разыгрывается 2 очка (на очко меньше максимума), то хотя бы $570 - 554 = 16$ матчей закончились вничью.

Если команд, которые играли вничью, не более 6, то ничейных матчей не более 15: все ничейные матчи могут происходить только между командами, которые хотя бы раз играли вничью, и таких матчей не более $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$. Поэтому 7 команд, игравшие вничью, обязательно найдутся.

6. Треугольник разбили тремя отрезками, выходящими из трех его вершин, на семь частей: четыре треугольника и три четырехугольника. Могут ли все эти три четырехугольника оказаться вписанными?

Труфанов А.

Ответ. Нет, не могут. **Решение.** Пусть ABC — данный треугольник, AD, BE, CF — отрезки, X — точка пересечения BE и AD, Y — точка пересечения CF и BE, Z — точка пересечения AD и CF. Пусть, для определенности, $AZ < AX$, тогда четырехугольные части — это четырехугольники $AZYE$, $BFZX$ и $CDXY$. Предположим, что все они вписанные.

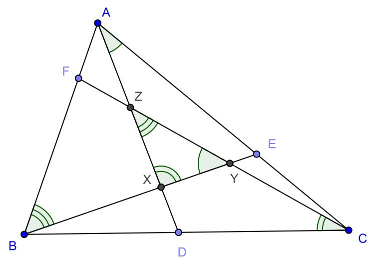

Рис. 1

Тогда $\angle XYZ = 180° - \angle EYZ = \angle EAZ < \angle BAC$. Аналогично $\angle YZX < \angle CBA$ и $\angle ZXY < \angle ACB$. Но тогда сумма углов треугольника XYZ меньше суммы углов треугольника ABC. С другой стороны, обе эти суммы равны по $180°$. Противоречие.

7. На доске записаны 10 различных чисел. Профессор Odd вычислил всевозможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве (по 1, по 3, по 5, по 7, по 9), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Аналогично профессор Even вычислил всевозможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве (по 2, по 4, по 6, по 8, по 10), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке профессора Odd на 1 больше, чем сумма на листке профессора Even. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

Кожевников П. А. по мотивам фольклора

Решение. Пусть $x_1, \dots, x_{10}$ — числа, записанные на доске, S_1 и S_2 — суммы на листах профессоров Odd и Even соответственно. Тогда $1+S_2-S_1 = (x_1-1)\cdot$ $\cdot(x_2-1)\dots(x_{10}-1)$. В самом деле, после раскрытия скобок со знаком «плюс» будет единица и всевозможные произведения чисел $x_1, \dots, x_{10}$, взятых в четном количестве, а со знаком «минус» будут всевозможные произведения чисел $x_1, \dots, x_{10}$, взятых в нечетном количестве. По условию $1 + S_2 - S_1 = 0$, поэтому хотя бы одно из выражений $x_i - 1$ равно 0.

8. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Одна из этих точек красная, а остальные синие. Треугольник с вершинами в синих точках называется *хорошим*, если красная точка находится внутри него. Может ли оказаться, что количество хороших треугольников составляет не менее половины от общего количества треугольников с вершинами в синих точках?

Кожевников П. А.

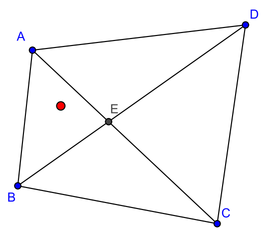

Рис. 2

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Возьмем любые четыре синих точки A, B, C, D. Докажем *лемму*: среди треугольников ABC, BCD, CDA, DAB не более двух хороших. Рассмотрим выпуклую оболочку P точек A, B, C, D. Если красная точка лежит вне P, то среди треугольников ABC, BCD, CDA, DAB нет хороших.

Пусть P — четырехугольник, для определенности четырехугольник $ABCD$, и E — точка пересечения его диагоналей (рис. 2). Красная точка лежит в одном из треугольников ABE, BCE, CDE, DAE, пусть, для определенности, в треугольнике ABE. В таком случае среди треугольников ABC, BCD, CDA, DAB хорошими являются только треугольники ABC и DAB.

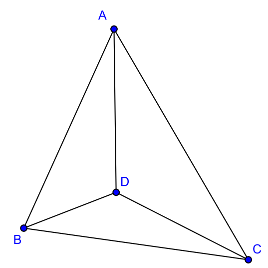

Рис. 3

Наконец, пусть P — треугольник, для определенности треугольник ABC (рис. 3). Красная точка лежит в одном из треугольников ABD,

BCD, CAD, т.е. два других точно не являются хорошими. Лемма доказана.

Оценим количество хороших треугольников, применив лемму ко всем C_{99}^4 четверкам синих точек. Поскольку каждый хороший треугольник входит ровно в 96 четверок (четвертую синюю точку можно добавить $99-3=96$ способами), количество хороших треугольников не более, чем $\frac{2\cdot C_{99}^4}{96} = \frac{2\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 96} = \frac{99\cdot 98\cdot 97}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = \frac{C_{99}^3}{2}$. А общее количество троек C_{99}^3 нечетно, значит, хороших троек среди них строго меньше половины.

Замечание.

Покажем, как получить точную верхнюю оценку на количество хороших треугольников. (Если n — достаточно большое количество синих точек, то наибольшая возможная доля хороших треугольников, как увидим, будет составлять около $1/4$.)

Пусть O — красная точка. Проведем окружность с центром в O и заменим каждую синюю точку A на точку пересечения луча OA с окружностью. Легко видеть, что от такой замены количество хороших треугольников не изменится. Таким образом, вопрос можно переформулировать следующим образом. На окружности с центром O располагаются n синих точек, никакие две из которых не являются концами диаметра. Каково наибольшее количество треугольников с вершинами в синих точках, содержащих внутри себя точку O, или, эквивалентно, остроугольных треугольников.

Оценим снизу количество тупоугольных треугольников, а точнее тупых углов вида ACB, где A, B, C — синие точки. Зафиксируем пару синих точек A и B, пусть на одной из дуг γ_1 с концами A и B расположено $t \leqslant \frac{n-2}{2}$ синих точек (соответственно, на дополнительной дуге γ_2 расположено $n-t-2 \geqslant t$ точек). Когда X пробегает синие точки на одной из двух дуг γ_1, γ_2, все углы AXB будут тупыми. Поэтому среди углов вида AXB, где X пробегает все синие точки за исключением A и B, тупых углов не менее $t = \min\{t, n-t-2\}$.

Суммируя по всем парам синих точек A, B, получаем нужную оценку. Для нечетного $n = 2k+1$ тупых углов не менее $n+2n+\ldots+n(k-1) = nk(k-1)/2$ (слагаемые в сумме соответствуют случаям $t = 1, 2, \ldots, k-1$). Отсюда доля нехороших треугольников не меньше, чем $\frac{nk(k-1)}{2C_n^3} = \frac{3nk(k-1)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{3(1-\frac{1}{k})}{4(1-\frac{1}{2k})}$.

Аналогично для четного $n = 2k$ можно показать, что доля нехороших треугольников не меньше, чем $\frac{3(1-\frac{1}{k})}{4(1-\frac{1}{2k})}$

Оценка точна: для нечетного n она достигается, например, когда синие вершины являются вершинами правильного n-угольника; для четного n оценка достигается, когда синие вершины являются вершинами «почти правильного» n-угольника, т. е. многоугольника, полученного из правильного «малым шевелением» вершин — так, чтобы противоположные вершины не являлись концами диаметра.

2. Второй день. 10–11 класс

15 марта

5. В футбольном турнире участвовало 20 команд, каждая сыграла с каждой ровно один матч. За победу дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме команды набрали 554 очка. Докажите, что найдутся 7 команд, каждая из которых сыграла хотя бы один раз вничью.

Белов Д. А. по мотивам фольклора

Решение. Предположим, что 7 команд, каждая из которых хотя бы раз сыграла вничью, не найдется. Найдем максимальное число очков S, которое могут набрать в этом турнире в сумме все команды.

Матчей всего $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$. В каждом матче разыгрывается как максимум 3 очка, значит, $S = 190\cdot 3 = 570$. У нас же команды набрали 554 очка. Поскольку при ничье в матче разыгрывается 2 очка (на очко меньше максимума), то хотя бы $570 - 554 = 16$ матчей закончились вничью.

Если команд, которые играли вничью, не более 6, то ничейных матчей не более 15: все ничейные матчи могут происходить только между командами, которые хотя бы раз играли вничью, и таких матчей не более $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$. Поэтому 7 команд, игравшие вничью, обязательно найдутся.

6. Действительные числа a, b и c таковы, что $\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right| < 2$. Докажите, что для этих чисел верны также неравенства $\left|\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right| < 2$ и $\left|\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}\right| < 2$.

Емельянов Л. А.

Решение 1. Умножение любого из чисел a, b, c на -1 не изменяет факт истинности (или неистинности) каждого из рассматриваемых неравенств. Кроме того, a и b из условия не равны 0. Значит, без ограничения общности можно считать, что $a > 0$, $b > 0$, $c \geqslant 0$.

По условию, $\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right| < 1$, значит, существует угол $\gamma \in (0, \pi)$, косинус которого равен $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, т.е. выполнено равенство $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$ или $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Построим треугольник, у которого две стороны равны a и b, а угол между этими сторонами равен γ. Пусть третья сторона этого треугольника равна c_1. По теореме косинусов $c_1^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. С учетом $c \geqslant 0$ получаем $c_1 = c$. Пусть α — угол нашего треугольника напротив стороны a. Снова из теоремы косинусов имеем $\frac{b^2+c^2-a^2}{bc} = 2\cos\alpha$. Требуемое неравенство $\left|\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right| < 2$ вытекает теперь из того, что $|\cos\alpha| < 1$.

Решение 2. Заметим, что при выполнении первого неравенства $c \neq 0$ (так как при $c = 0$ имеем неравенство $a^2 + b^2 < 2|ab|$, что неверно). Сделаем равносильные преобразования неравенства при условии $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$:

$\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right| < 2 \Leftrightarrow |a^2+b^2-c^2| < 2|ab| \Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2)^2 < (2ab)^2 \Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2 < 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2-2ab)(a^2+b^2-c^2+2ab) < 0 \Leftrightarrow ((a-b)^2-c^2)((a+b)^2-c^2) < 0 \Leftrightarrow (a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c) < 0 \Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) > 0$. Неравенство приведено к симметричному виду относительно a, b, c. Аналогично, каждое из двух других неравенств из условия задачи эквивалентно этому симметричному неравенству вместе с условиями $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

7. На каркасе единичного куба находятся восемь муравьев. Докажите, что найдутся два муравья на расстоянии, не превышающем 1.

Фольклор. Обработка Токарева С. И.

Решение 1. Будем доказывать более сильный факт, а именно, что расстояние по каркасу между какими-то двумя муравьями не превосходит единицы.

Предположим, что это неверно, и расстояние между любыми двумя муравьями больше 1.

Для каждого муравья найдём ближайшую к нему вершину куба. Очевидно, что ближайшая вершина будет на расстоянии не более 1/2. Отсюда следует, что для разных муравьев будут разные ближайшие вершины. Это значит, что для каждой вершины куба есть ровно один муравей, который находится от неё на расстоянии не более 1/2.

Найдём муравья X, наиболее удалённого от своей ближайшей вершины A. Пусть муравей X располагается на ребре AB, при этом $AX \leqslant \frac{1}{2}$. Пусть Y — муравей, для которого ближайшая вершина — B. Получается, что $AX \geqslant BY$, поэтому $BX + BY = (1 - AX) + BY \leqslant 1$. То есть расстояние между точками X и Y не более единицы. Противоречие.

Решение 2. Будем рассуждать от противного. Заметим, что ни на каком ребре не могут сидеть два муравья. Если муравей сидит в вершине, то присвоим ему одно из трех ребер, выходящих из этой вершины и будем считать, что он сидит именно на нем. Тогда каждому муравью соответствует ровно одно ребро, на котором он сидит.

Удалим из куба 4 ребра, на которых муравьи не сидят, и оставшиеся вершины и ребра будем считать вершинами и ребрами графа. В этом графе 8 вершин и 8 ребер. Как известно, тогда в нем есть цикл.

Рассмотрим этот цикл. Пусть в нем k ребер. Тогда на этих ребрах сидит k муравьев. Длина цикла равна k, поэтому между какими-то двумя муравьями (считая по каркасу) расстояние не превышает 1. Но тогда и обычное расстояние между этими двумя муравьями не превосходит 1, что и требовалось.

8. Стол имеет форму правильного 1000-угольника со стороной 1. В одной из вершин этого 1000-угольника сидит жук. Все 1000 вершин нумеруются в некотором порядке числами $1, 2, \ldots, 1000$ так, что жук изначально находится в вершине с номером 1. Жук может ползти только по краю стола и только по часовой стрелке. Он начинает ползти из вершины номер 1 и ползет без остановки, пока не достигнет вершины 2, в которой делает остановку. Далее он продолжает путь по часовой стрелке из вершины 2, пока не достигнет вершины 3, в которой делает остановку, и т. д. Жук заканчивает свой путь в вершине номер 1000. Найдите количество нумераций вершин, для которых длина пути жука равняется 2017.

Кожевников П. А.

Ответ. $3^{16} \cdot 2^{982} - 999 \cdot 2^{16}$.

Решение 1. Разобьём весь путь жука на 999 участков: от номера 1 к номеру 2, от 2 к 3, ... от 999 до 1000. Обозначим длины этих переходов $x_1, x_2, \ldots x_{999}$. Тогда имеем $x_1 + x_2 + \ldots + x_{999} = 2017$.
Обозначим $s_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$ для i от 1 до 999. Заметим, что если каждое $x_i = s_i - s_{i-1}$ меньше 1000, а все s_i дают разные ненулевые остатки при делении на 1000, то по такому набору $s_1 < s_2 \ldots < s_{999} = 2017$ однозначно восстанавливается корректная траектория жука. Итак, в качестве s_i надо выбрать по одному числу каждого ненулевого остатка. Число 2017 точно должно быть выбрано, далее на остатки от 1 до 16 есть 3 варианта, а на остальные 982 остатка 2 варианта. Получаем $3^{16} \cdot 2^{982}$. Посчитаем, сколько лишних наборов мы при этом посчитали. Это те наборы, у которых одно из x_i больше 1000. Заметим, что только одно из x_i может быть больше 1000. Пусть это x_k. Положим $r_i = s_i$ для $i < k$, и $r_i = s_i - 1000$ для $i \geqslant k$. Теперь числа $r_1 < r_2 < \ldots < r_{999} = 1017$ дают разные ненулевые остатки при делении на 1000. В качестве r_i надо выбрать по одному числу каждого ненулевого остатка. Число 1017 точно должно быть выбрано, далее на остатки от 1 до 16 есть 2 варианта, а на остальные 982 остатка по одному варианту. Получаем 2^{16} вариантов. Итак, для каждого k от 1 до 999 получаем, что посчитано лишних 2^{16} способов. Значит, ответ в задаче $3^{16} \cdot 2^{982} - 999 \cdot 2^{16}$.

Решение 2. Обозначим вершины подряд $A_1, A_2, \ldots, A_{1000}$ по часовой стрелке так, что A_1 имеет номер 1. Пусть жук прополз путь длины 2017, тогда он прополз два полных круга и еще 17 сторон, т. е. в конце пути оказался в вершине A_{18}. Покрасим все вершины, кроме A_1 и A_{18}, таким образом: все вершины, в которых жук останавливался на 1 круге, покрасим красным; все вершины, в которых жук останавливался на 2 круге, — желтым; те из вершин $A_2, A_3, \ldots, A_{17}$, в которых жук не останавливался на первых двух кругах (но останавливался на последнем участке длины 17) — зеленым. Всего таких раскрасок будет $3^{16} \cdot 2^{982}$, поскольку каждая из 16 вершин $A_2, \ldots, A_{17}$ может быть окрашена в один из трех цветов, а каждая из вершин $A_{19}, \ldots, A_{1000}$ — в один из двух цветов.

По каждой раскраске однозначно восстанавливается нумерация. Действительно, жук ползет из вершины 1, делая остановки в красных вершинах на первом круге; по пути нумеруем красные вершины подряд по часовой стрелке числами $2, 3, \ldots, x$. Далее жук проползает без остановки через 1 и делает остановки на втором круге в желтых вершинах; по пути продолжим нумерацию подряд желтых вершин числами $x+1, x+2, \ldots, y$. Далее жук снова проползает без остановки через 1 и делает остановки в зеленых вершинах (если они есть), которые мы нумеруем подряд $y+1, \ldots, 999$. И, наконец, завершаем путь в вершине A_{18}, которой присваиваем номер 1000.

Однако не для каждой раскраски описанный выше путь жука корректный (т. е. удовлетворяет условию). Во-первых, необходимо наличие хотя бы одной красной и хотя бы одной желтой вершины. Кроме того, переход от последней пройденной красной вершины до первой желтой вершины должен быть меньше полного круга. Аналогично, переход от последней пройденной желтой вершины до первой зеленой вершины (или до A_{18} в случае отсутствия зеленых вершин) должен быть меньше полного круга.

Остается посчитать количество *лишних* раскрасок.

1) Если среди вершин $A_{19}, \ldots, A_{1000}$ есть и красная и желтая, то лишние в точности те раскраски, в которых вершины $A_{19}, \ldots, A_k$ — красные, $A_{k+1}, \ldots, A_{1000}$ — желтые (для некоторого k от 19 до 999), а каждая из вершин $A_2, A_3, \ldots, A_{17}$ либо зеленая, либо красная. Таких лишних раскрасок $981 \cdot 2^{16}$.

2) Пусть все $A_{19}, \ldots, A_{1000}$ — красные. Тогда лишние — это раскраски, в которых либо среди $A_2, A_3, \ldots, A_{17}$ нет желтой (2^{16} вариантов); либо для желтой вершины A_m с наибольшим m среди предшествующих вершин A_2, $\ldots$, A_{m-1} нет зеленой вершины (т. е. каждая из вершин $A_2, \ldots, A_{m-1}$ либо желтая, либо красная, а каждая из вершин $A_{m+1}, \ldots, A_{17}$ либо зеленая, либо красная — $2^{m-1} \cdot 2^{16-m} = 2^{15}$ вариантов для фиксированного m). Итого в случае 2) $2^{16} + 16 \cdot 2^{15} = 18 \cdot 2^{15}$ лишних раскрасок.

3) Наконец пусть все $A_{19}, \ldots, A_{1000}$ — желтые. Тогда лишние — это раскраски, в которых либо среди $A_2, A_3, \ldots, A_{17}$ нет красной (2^{16} вариантов); либо для красной вершины A_s с наибольшим s среди предшествующих вершин $A_2, \ldots, A_{s-1}$ нет желтой вершины (т. е. каждая из вершин $A_2, \ldots, A_{s-1}$ либо зеленая, либо красная, а каждая из вершин $A_{s+1}, \ldots, A_{17}$ либо зеленая, либо желтая — $2^{s-1} \cdot 2^{16-s} = 2^{15}$ вариантов для фиксированного s). Итого в случае 2) также $2^{16} + 16 \cdot 2^{15} = 18 \cdot 2^{15}$ лишних раскрасок.

Суммируя количества лишних раскрасок в случаях 1), 2), 3), получаем ответ.