10 класс

10.1. Найдите все корни уравнения $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, если известно, что $a+d=b+c=2015$ и $a \neq c$ (сами числа a, b, c, d не даны).

Ответ. 1007,5.

Первое решение. Раскрыв скобки, получим $ab-(a+b)x = cd-(c+d)x$. Подставив $d=2015-a$ и $b=2015-c$, получаем $a(2015-c)-(a+2015-c)x = c(2015-a)-(c+2015-a)x$. Сократив и приведя подобные, получим $(a-c)2015 = 2(a-c)x$. Учитывая, что $a \neq c$, получаем $2x = 2015$, то есть $x = 1007{,}5$.

Второе решение. Поскольку $c = 2015-b$ и $d = 2015-a$, параболы $y=(x-a)(x-b)$ и $y=(x-c)(x-d)$ симметричны относительно прямой $x = 2015/2$. Значит, они пересекаются в точке, лежащей на этой прямой. Если бы эти параболы имели еще одну общую точку, то симметричная ей точка также лежала бы на обеих параболах, то есть наше уравнение имело бы как минимум три различных корня. Но тогда бы эти параболы совпадали. А это противоречит условию, так как в этом случае $a = d = 2015/2$ и $b = c = 2015/2 = a$.

Комментарий. Ответ содержит переменные a, b, c или d — 0 баллов.

Показано. что $x = 1007{,}5$ является корнем уравнения, но не показано, что других корней нет — 4 балла.

10.2. Вася выбрал некоторое число x и выписал последовательность $a_1 = 1+x^2+x^3$, $a_2 = 1+x^3+x^4$, $a_3 = 1+x^4+x^5$, $\ldots$, $a_n = 1+x^{n+1}+x^{n+2}$, $\ldots$. Оказалось, что $a_2^2 = a_1a_3$. Докажите, что для всех $n \geqslant 3$ выполняется равенство $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

Решение. Запишем равенство $a_2^2 = a_1a_3$. Имеем: $(1+x^3+x^4)^2 = (1+x^2+x^3)(1+x^4+x^5)$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^4+x^3 = x^5+x^2$. Преобразуем: $0 = x^5+x^2-x^4-x^3 = x^2(x^3+1-x^2-x) = x^2(x-1)^2(x+1)$. Откуда либо $x=0$, либо $x=-1$, либо $x=1$. В первых двух случаях $a_n = 1$ для всех n, в третьем случае $a_n = 3$ для всех n. Во всех этих случаях выполняется требуемое равенство $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

Замечание. После получения равенства $x^4+x^3 = x^5+x^2$ можно действовать и по-другому. Раскрывая скобки в равенстве

$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$ и приводя подобные слагаемые, получаем, что оно равносильно равенству $x^{n+2} + x^{n+1} = x^{n+3} + x^n$, которое получается из $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$ домножением на x^{n-2}.

Комментарий. Получено соотношение $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$ — 2 балла.

После этого верно разобраны лишь два из трех случаев $x = 0$, $x = 1$ и $x = -1$ — 2 балла.

10.3. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 5×5 так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Закрашенные уголки не должны перекрываться.)

Ответ. 4.

Решение. Пусть клетки квадрата 5×5 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Рассмотрим 4 уголка, отмеченных на рис. 7. Так как ни один из этих уголков покрасить нельзя, то в каждом из них покрашено по крайней мере по одной клетке. Заметим, что одним уголком нельзя покрасить клетки двух отмеченных уголков. Значит, всего покрашено не меньше 4 уголков.

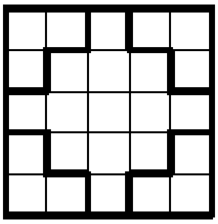

Рис. 7

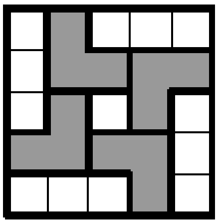

Рис. 8

На рис. 8 показано, как покрасить 4 уголка так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.

Комментарий. Доказано, что покрашенных уголков не меньше 4 — 4 балла.

Нарисован верный пример с 4 покрашенными уголками — 3 балла.

10.4. Назовем число, большее 25, *полупростым*, если оно является суммой каких-то двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел могут оказаться полупростыми?

Ответ. 5.

Решение. Заметим, что нечетное полупростое число может быть лишь суммой двойки и нечетного простого числа.

Покажем, что три подряд идущих нечётных числа $2n+1$, $2n+3$ и $2n+5$, бóльших 25, не могут быть полупростыми одновременно. Предполагая противное, получаем, что числа $2n-1$, $2n+1$ и $2n+3$ — простые, и все они больше 3. Но одно из этих трёх чисел делится на 3. Противоречие.

Заметим, что среди любых шести последовательных чисел есть три подряд идущих нечетных числа; значит, последовательных полупростых чисел не может быть больше пяти. Пять подряд идущих чисел могут быть полупростыми; например, $30 = 17 + 13$, $31 = 29 + 2$, $32 = 19 + 13$, $33 = 31 + 2$, $34 = 23 + 11$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Доказано, что последовательных полупростых чисел (больших 25) не более 5, — 4 балла.

Приведен пример 5 последовательных полупростых чисел (больших 25) — 3 балла.

10.5. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, а K, L и M — середины сторон AB, BC и CA соответственно. Докажите, что если $\angle C_1MA_1 = \angle ABC$, то $C_1K = A_1L$.

Решение. Отрезок C_1M является медианой прямоугольного треугольника CC_1A, поэтому $C_1M = \frac{AC}{2} = MA$. Тогда $\angle C_1MA = \pi - 2\angle BAC$. Аналогично, $\angle A_1MC = \pi - 2\angle BCA$. Отсюда $\angle C_1MA + \angle A_1MC = 2(\pi - \angle BAC - \angle BCA) = 2\angle ABC$, а тогда $\angle A_1MC_1 = \pi - (\angle AMC_1 + \angle CMA_1) = \pi - 2\angle ABC$.

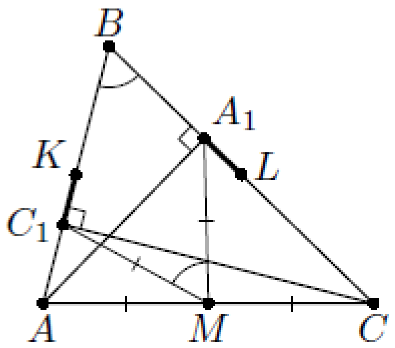

Рис. 9

Из условия следует, что $\angle ABC = \pi - 2\angle ABC$. Отсюда $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$. По условию, треугольник ABC — не равнобедренный; пусть, например, $AB < BC$. Тогда из прямоугольного треугольника ABA_1 получаем $BA_1 = BA\cos(\pi/3) = AB/2$. Значит, $A_1L = BL - BA_1 = \frac{BC - AB}{2}$. Аналогично, $KC_1 = BC_1 - BK = \frac{BC - AB}{2} = A_1L$. Утверждение доказано.

Комментарий. Доказано, что $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ — 3 балла.