11 класс

11.1. Существует ли восьмизначное число без нулевых цифр, которое при делении на свою первую цифру дает остаток 1, при делении на вторую цифру дает остаток 2, ..., при делении на восьмую цифру дает остаток 8?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, что такое число существует. Так как остатки при делении на 8 цифр — различные числа от 1 до 8, то цифры у восьмизначного числа различные.

Далее, если число дает остаток 8 при делении на цифру, то эта цифра — 9. Значит, последняя цифра числа равна 9. Аналогично, если число дает остаток 7 при делении на цифру, эта цифра — 8 или 9. Но 9 уже стоит на последнем месте; поэтому предпоследняя цифра — 8. Рассуждая аналогично, получим, что наше число может быть равно только 23456789. Однако это число, например, при делении на третью цифру (4) дает остаток 1, а не 3.

Замечание. Также число 23456789 даёт остаток 5 (а не 7) при делении на 8.

Комментарий. Доказано, что число должно состоять из различных цифр от 2 до 9 — 3 балла.

Дополнительно показано, что оно может быть только 23456789 — 2 балла.

11.2. Уравнение $(x+a)(x+b)=9$ имеет корень $a+b$. Докажите, что $ab \leqslant 1$.

Решение. Подставив данный корень $x=a+b$ в уравнение, получаем равенство $(a+b+a)(a+b+b)=(2a+b)(2b+a)=9$. Тогда $9=5ab+2(a^2+b^2) \geqslant 5ab+2\cdot 2ab=9ab$, откуда $ab \leqslant 1$. (Мы использовали неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, которое эквивалентно $(a-b)^2 \geqslant 0$.)

Комментарий. В решении применяется неравенство о средних для чисел, знак которых неизвестен, — не более 3 баллов.

11.3. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ $(10 < n < 20)$ плитками двух типов: 2×2 и 5×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

Ответ. 12, 15, 18.

Решение. Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 5x = 9x = n^2$. Значит, n^2 должно делиться на 9, то есть n должно делиться на 3. Таким образом, могут подойти лишь значения $n = 12$, $n = 15$ и $n = 18$.

Покажем, как уложить требуемые квадраты. Квадрат 6×6 можно уложить, использовав поровну плиток обоих типов (см. рис. 10). Так как квадраты 12×12 и 18×18 разрезаются на 6×6, то их также можно уложить требуемым образом.

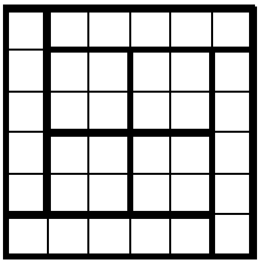

Рис. 10

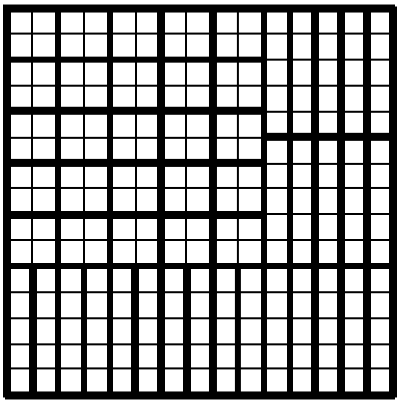

Рис. 11

На рис. 11 показано, как уложить квадрат 15×15, используя по 25 плиток каждого типа.

Замечание 1. Квадрат 18×18 можно разбить на прямоугольники 2×9, каждый из которых можно уложить, используя по 2 плитки каждого типа.

Замечание 2. Можно показать, что любой квадрат $3m \times 3m$ $(m > 3)$ можно требуемым образом уложить плиткой.

Комментарий. Показано, что n^2 делится на 9 и сделан неверный вывод, что n делится на 9 — 0 баллов.

Показано, что n делится на 3 — 2 балла.

Показано, что при $n = 12$ пол можно уложить — 2 балла.

Показано, что при $n = 15$ пол можно уложить — 2 балла.

Показано, что при $n = 18$ пол можно уложить — 1 балл.

11.4. Середина ребра SA треугольной пирамиды $SABC$ равноудалена от всех вершин пирамиды. Пусть SH — высота пирамиды. Докажите, что $BA^2 + BH^2 = CA^2 + CH^2$.

Первое решение. Пусть M — середина ребра SA. Так как $MA = MS = MC$, то в треугольнике ASC медиана MC в два раза больше стороны AS, к которой она проведена. Значит, треугольник ASC — прямоугольный с гипотенузой AS. Аналогично, треугольник ASB — прямоугольный с гипотенузой AS. Поэтому $AS^2 = BA^2 + SB^2 = CA^2 + SC^2$. Но $SC^2 = CH^2 + SH^2$ и $SB^2 = BH^2 + SH^2$. Подставив в предыдущее равенство, получим $BA^2 + BH^2 + SH^2 = CA^2 + CH^2 + SH^2$. Вычтя из обеих частей равенства SH^2, получим требуемое.

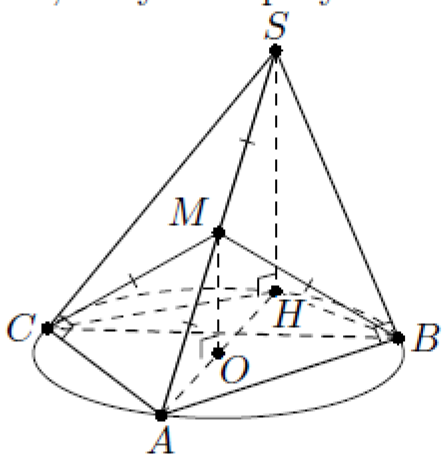

Рис. 12

Второе решение. Пусть M — середина ребра SA, а точка O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC. Тогда MO — средняя линия треугольника SAH, поэтому точка O — середина отрезка AH. Из равенства прямоугольных треугольников AMO, BMO и CMO с общим катетом OM и равными, по условию, гипотенузами AM, BM и CM, получаем, что $OA = OB = OC$. Значит, точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC, а тогда AH — диаметр этой окружности. Значит, углы ABH и ACH — прямые. Применив теорему Пифагора к треугольникам ABH и ACH, получаем утверждение задачи.

Замечание. Другое доказательство того, что $\angle ABS = \angle ACS = 90°$, основано на том, что точка M является центром сферы, описанной около пирамиды, а тогда отрезок SA — диаметр этой сферы.

Комментарий. Доказано, что хотя бы один из углов $\angle ABS$, $\angle ACS$, $\angle ABH$ или $\angle ACH$ прямой — 2 балла.

11.5. Существуют ли натуральные a и b, большие тысячи, такие, что для любого c, являющегося точным квадратом, три числа a, b и c не являются длинами сторон треугольника?

Ответ. Существуют.

Решение. Пусть, например, $a = 10000^2 + 10000$, $b = 1001$. Предположим, что существует $c = d^2$ такое, что числа a, b и c являются длинами сторон некоторого треугольника. Тогда должны выполняться неравенства треугольника $a + b > c$, $b + c > a$, $a+c > b$. Рассмотрим первые два из них: $a+b > c$ и $c > a-b$. Заметим, что $a+b = 10000^2+10000+1001 < 10000^2+10000+10000+ +1 = 10001^2$, и $a - b = 10000^2 + 10000 - 1001 > 10000^2$. Но тогда $10001^2 > a+b > c > a-b > 10000^2$, то есть $10001^2 > d^2 > 10000^2$. Это невозможно.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Только ответ без объяснений — 0 баллов.

Предъявлены два числа, но нет проверки того, что они удовлетворяют требованиям задачи — 0 баллов.