Первая Кавказская математическая олимпиада. 12 декабря 2015г.

7 класс

7.1. Существует ли четырехзначное натуральное число с различными ненулевыми цифрами, обладающее следующим свойством: если к нему прибавить это же число, записанное в обратном порядке, то получится число, делящееся на 101?

Ответ. Существует.

Решение. Подойдет, например, число 1234. Действительно, $1234 + 4321 = 5555 = 101 \cdot 55$.

Замечание. Число $\overline{abcd}$ с различными ненулевым цифрами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда $a+d = b+c$.

Комментарий. Любой правильный пример с проверкой того, что он подходит — 7 баллов.

Любой правильный пример без проверки того, что он подходит — 5 балла.

7.2. Имеется 9 карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Какое наибольшее количество этих карточек можно разложить в некотором порядке в ряд так, чтобы на любых двух соседних карточках одно из чисел делилось на другое?

Ответ. 8.

Решение. Заметим, что все 9 карточек положить в ряд требуемым образом не получится. Это следует из того, что у каждой из карточек с числами 5 и 7 может быть только один сосед — карточка с числом 1. Значит, обе карточки 5 и 7 должны лежать с краев, а карточка с единицей должна соседствовать с каждой из них, что невозможно.

Выбрать 8 карточек и разложить их в ряд согласно требованиям задачи можно, например, так: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

Комментарий. Доказательство того, что все карточки разложить не удастся — 4 балла.

Любой правильный пример выкладывания 8 карточек — 3 балла.

7.3. Петя купил одно пирожное, два кекса и три бублика, Аня купила три пирожных и бублик, а Коля купил шесть кексов. Все они заплатили за покупки одинаковые суммы денег. Лена купила два пирожных и два бублика. А сколько кексов она могла бы купить на ту же потраченную ей сумму?

Ответ. 5 кексов.

Решение. Суммарная стоимость покупки Пети и Ани равна стоимости двух покупок Коли. Если обозначить П, К и Б соответственно стоимости пирожного, кекса и бублика, то получаем равенство: $(П+2К+3Б)+(3П+Б) = 12К$, откуда следует, что $4П + 4Б = 10К$, то есть $2П + 2Б = 5К$.

Замечание. Из условия можно вычислить и все отношения стоимостей, именно, $П : К : Б = 7 : 4 : 3$.

Комментарий. Только правильный ответ без объяснений — 1 балл.

7.4. В классе 26 учащихся. Они договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо рыцарем (рыцари всегда говорят правду). Когда они пришли в класс и сели за парты, каждый из них сказал: «Я сижу рядом с лжецом». Затем некоторые учащиеся пересели за другие парты. Мог ли после этого каждый сказать: «Я сижу рядом с рыцарем»? Каждый раз за любой партой сидело ровно двое учащихся.

Ответ. Не мог.

Решение. Заметим, что фраза «Я сижу рядом со лжецом» могла быть произнесена только в том случае, когда за одной партой сидят лжец и рыцарь. Это означает, что в классе лжецов и рыцарей поровну — по 13. Фраза же «Я сижу рядом с рыцарем» могла быть произнесена только в том случае, когда за одной партой сидят либо два лжеца, либо два рыцаря. Но 13 — нечетное число, поэтому рассадить 13 лжецов и 13 рыцарей за парты так, чтобы за каждой партой сидели либо два лжеца, либо два рыцаря, не получится.

Комментарий. Замечено, что вначале за каждой партой сидели лжец и рыцарь — 2 балла.

Замечено, что после пересадки рядом должны сидеть два рыцаря или два лжеца — 2 балла.

Сделаны оба этих замечания — 3 балла (а не 4).

7.5. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 6×6 так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Покрашенные уголки не должны перекрываться.)

Ответ. 6.

Решение. Пусть клетки квадрата 6×6 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Тогда в каждом квадратике 2×2 покрашено хотя бы 2 клетки, иначе в этом квадратике можно покрасить уголок. Разбивая квадрат 6×6 на 9 квадратиков 2×2, получаем, что всего покрашено не меньше $9 \cdot 2 = 18$ клеток. Итак, покрашено не меньше 6 уголков.

На рис. 3 показано, как покрасить 6 уголков, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.

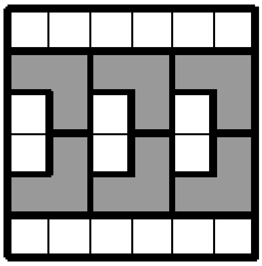

Рис. 3

Комментарий. Доказано, что покрашенных уголков не меньше 6 — 4 балла.

Нарисован пример с 6 покрашенными уголками — 3 балла.