Первая Кавказская математическая олимпиада. 12 декабря 2015г.

8 класс

8.1. Найдите какие-нибудь четыре различных натуральных числа, обладающих следующим свойством: если к произведению любых двух из них прибавить произведение двух остальных чисел, то получится простое число.

Решение. Подойдут, например, числа 1, 2, 3 и 5. Действительно, значения всех трех выражений $1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 17$, $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13$ и $1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 11$ являются простыми числами.

Замечание. Существуют и другие примеры, такие, как $(1, 2, 3, 13)$, $(2, 5, 11, 17)$ или $(4, 5, 7, 11)$. Нетрудно понять, что в любом таком примере должно быть ровно одно чётное число.

Комментарий. Правильный пример без проверки того, что предъявленный набор чисел подходит — 4 балла.

Любой неверный пример — 0 баллов.

8.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка K — середина AB, точка L — середина BC, точка M — середина CD, точка N — середина DA. Для некоторой точки S, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$, оказалось, что $KS = LS$ и $NS = MS$. Докажите, что $\angle KSN = \angle MSL$.

Решение. Заметим, что отрезок KN является средней линией треугольника BAD. Значит, $KN = \frac{BD}{2}$. Аналогично, из треугольника BCD получаем $LM = \frac{BD}{2}$. Но тогда треугольники KSN и MSL равны по трем сторонам. Отсюда следует требуемое равенство соответствующих углов.

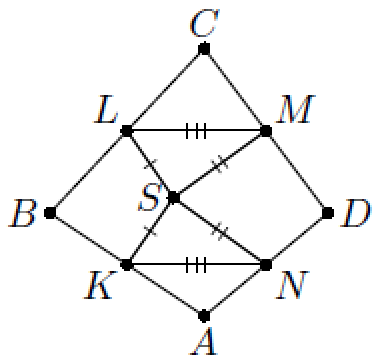

Рис. 4

Замечание. Из условия следует, что диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны.

8.3. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ плитками двух типов: 2×2 и 3×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

Ответ. При n, делящихся на 7.

Решение. Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 3x = 7x = n^2$. Значит, n должно делиться на 7.

Если же n делится на 7, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что квадрат 7×7 можно уложить, используя по 7 плиток каждого вида (см. рис. 5). А квадрат $7k \times 7k$ можно разрезать на квадраты 7×7.

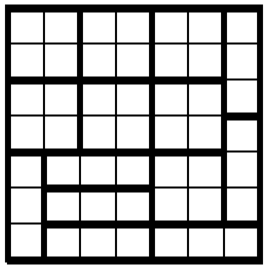

Рис. 5

Комментарий. Показано, что n делится на 7 — 3 балла.

Показано, что при $n = 7k$ пол можно уложить — 4 балла.

8.4. Сумма чисел a, b и c равна нулю, а их произведение отрицательно. Докажите, что число $\dfrac{a^2+b^2}{c} + \dfrac{b^2+c^2}{a} + \dfrac{c^2+a^2}{b}$ положительно.

Первое решение. Так как $abc < 0$, то либо одно из чисел a, b, c отрицательно, либо все три. Но $a + b + c = 0$, поэтому все три числа отрицательными быть не могут. Пусть, без ограничения общности, $a > 0$, $b > 0$ и $c < 0$. Нам нужно доказать, что $\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} > 0$. Или $\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} > -\frac{a^2+b^2}{c} = \frac{a^2+b^2}{a+b}$. Так как $a > 0$ и $b > 0$, то $\frac{b^2+c^2}{a} > \frac{b^2}{a} > \frac{b^2}{a+b}$. Аналогично, $\frac{c^2+a^2}{b} > \frac{a^2}{b} > \frac{a^2}{a+b}$. Сложив два полученных неравенства, получим требуемое.

Второе решение. Перепишем числитель первой дроби в виде $(a+b)^2 - 2ab = (-c)^2 - 2ab = c^2 - 2ab$. Тогда первую дробь можно преобразовать к виду $c - \frac{2ab}{c}$, а сумму дробей — к виду

$$\left(c - \frac{2ab}{c}\right) + \left(a - \frac{2bc}{a}\right) + \left(c - \frac{2ab}{c}\right) =$$
$$= (a+b+c) - 2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) = -2abc\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Выражение в скобках положительно, а произведение abc, по условию, отрицательно, откуда и следует утверждение задачи.

Замечание. Можно заметить, что, если c отрицательно, а a

и b положительны, то $|c| = a+b > a$. Поэтому $\frac{b^2+c^2}{a} > -\frac{b^2+a^2}{c}$; кроме того, $\frac{c^2+a^2}{b} > 0$.

8.5. На столе лежат 300 монет. Петя, Вася и Толя играют в следующую игру. Они ходят по очереди в следующем порядке: Петя, Вася, Толя, Петя, Вася, Толя, и т. д. За один ход Петя может взять со стола 1, 2, 3 или 4 монеты, Вася — 1 или 2 монеты, а Толя — тоже 1 или 2 монеты. Могут ли Вася и Толя договориться так, что, как бы ни играл Петя, кто-то из них двоих заберет со стола последнюю монету?

Ответ. Не могут.

Решение. Покажем, как играть Пете, чтобы он смог забрать со стола последнюю монету независимо от игры Васи и Толи. Пусть первым ходом Петя возьмет 4 монеты. Заметим, что Вася и Толя за свои ходы суммарно могут взять от 2 до 4 монет. Это значит, что после первого хода Толи на столе останется от 292 до 294 монет. После этого Пете нужно взять 2, 3 или 4 монеты так, чтобы на столе осталось 290 монет. А теперь, если Вася и Толя будут брать суммарно 2, 3 или 4 монеты, Пете нужно брать соответственно 3, 2 или 1 монету, чтобы после каждого его хода число монет, остающихся на столе, делилось на 5. Таким образом, он оставит 285, 280, ..., 5 и, наконец, 0 монет, то есть заберет со стола последнюю монету.

Замечание. Существуют и другие выигрышные стратегии Пети.