Первая Кавказская математическая олимпиада. 12 декабря 2015г.

9 класс

9.1. За круглым столом сидят 10 человек, некоторые из них — рыцари, а остальные — лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Оба моих соседа — рыцари»? (Ложным считается утверждение, которое хотя бы частично не является верным.)

Ответ. 9.

Решение. Заметим, что все 10 не могли сказать такую фразу. Так как за столом есть и рыцарь, и лжец, то найдутся лжец и рыцарь, сидящие рядом. Но тогда у этого рыцаря не оба соседа рыцари. Если же за столом сидит 9 лжецов и 1 рыцарь, то каждый из этих 9 лжецов мог сказать фразу «Оба моих соседа — рыцари», так как у каждого лжеца среди соседей есть лжец.

Комментарий. Доказано, что все 10 человек не могли сказать требуемую фразу — 4 балла.

Показано, что при некоторой рассадке 9 человек могли сказать требуемую фразу — 3 балла.

9.2. Пусть a и b — произвольные различные числа. Докажите, что уравнение $(x+a)(x+b) = 2x+a+b$ имеет два различных корня.

Первое решение. Перенесем все в левую часть: $(x+a)(x+ + b) - (2x + a + b) = 0$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^2 + (a+b-2)x + ab - a - b = 0$. Посчитаем дискриминант получившегося квадратного уравнения. Он равен $D = (a+b-2)^2 - 4(ab-a-b) = a^2+b^2-2ab+4 = (a-b)^2+4 > 0$. Значит, уравнение имеет два различных корня.

Второе решение. Рассмотрим приведенный квадратный трехчлен $f(x) = (x+a)(x+b) - (2x+a+b)$. То есть уравнение из условия эквивалентно $f(x) = 0$. Заметим, что $f(-a) = a - b$ и $f(-b) = b-a$. Так как $a \neq b$, в одной из этих точек значение этого приведенного трехчлена отрицательно. Значит, у трехчлена есть ровно два корня.

Комментарий. Доказано, что у уравнения есть хотя бы один корень — 5 баллов.

9.3. Пусть AL — биссектриса остроугольного треугольника ABC, а

ω — описанная около него окружность. Обозначим через P точку пересечения продолжения высоты BH треугольника ABC с окружностью ω. Докажите, что если $\angle BLA = \angle BAC$, то $BP = CP$.

Решение. Обозначим $\alpha = \angle BAL$. Тогда $\angle CAL = \alpha$, и, по условию, $\angle BLA = 2\alpha$. Так как $\angle BLA$ — внешний в треугольнике ALC, получаем $\angle ACL = \angle BLA - \angle CAL = \alpha$.

Из прямоугольного треугольника BHC теперь получаем $\angle CBH = 90^\circ - \alpha$. Так как точка P лежит на ω, имеем $\angle BPC = \angle BAC = 2\alpha$. Значит, $\angle PCB = 180^\circ - \angle CBP - \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 2\alpha = 90^\circ - \alpha = \angle CBP$. Отсюда и следует, что треугольник PBC равнобедренный, $BP = CP$.

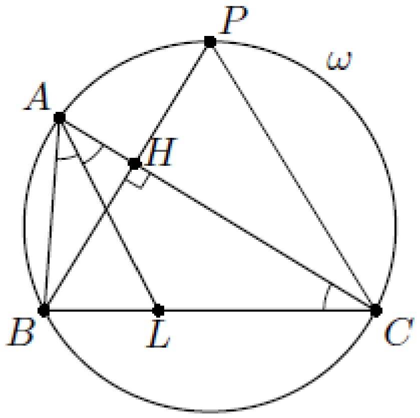

Рис. 6

9.4. Существует ли девятизначное число без нулевых цифр, остатки от деления которого на каждую из его цифр различны?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, что требуемое число существует. Тогда у него все цифры различны, поскольку все остатки при делении на них различны. Значит, число состоит из цифр от 1 до 9, каждая использована по одному разу. Поэтому сумма его цифр равна 45. Но тогда оно делится и на 3, и на 9 (а также на 1), то есть имеет одинаковые (нулевые) остатки при делении на эти цифры. Противоречие.

Комментарий. Доказано, что в числе все цифры должны быть различны — 3 балла.

9.5. Назовем *палиндромом* натуральное число, десятичная запись которого одинаково читается как слева направо, так и справа налево (десятичная запись не может начинаться с нуля; например, число 1221 — палиндром, а числа 1231, 1212 и 1010 — нет). Каких палиндромов среди чисел от 10000 до 999999 больше — с нечетной суммой цифр или с четной, и во сколько раз?

Ответ. Палиндромов с четной суммой цифр больше в 3 раза.

Решение. Заметим, что палиндром с 5 цифрами выглядит как $\overline{abcba}$, а с 6 цифрами — как $\overline{abccba}$. Каждый из этих палиндромов однозначно восстанавливается по первым трем цифрам $\overline{abc}$. Это означает, что и палиндромов с 5 цифрами, и палиндромов с 6 цифрами столько же, сколько и чисел $\overline{abc}$ от 100 до 999 (то есть 900).

Заметим, что любой палиндром с 6 цифрами имеет четную сумму цифр $2(a+b+c)$. А сумма цифр палиндрома с 5 цифрами есть $2(a+b)+c$, то есть зависит только от четности цифры c. Значит, при любых фиксированных a и b существует пять (четных) цифр c, для которых $2(a+b)+c$ четно, и пять (нечетных) цифр c, для которых $2(a+b)+c$ нечетно. Поэтому палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна, столько же, сколько палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр четна (их по 450). А значит, палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна, в 2 раза меньше, чем палиндромов с 6 цифрами. Итак, палиндромов от 10 000 до 999 999 с четной суммой цифр больше, чем с нечётной, причем ровно в 3 раза.

Замечание. Доказать, что палиндромов с четной суммой цифр больше, можно, установив взаимно однозначное соответствие между пятизначными и шестизначными палиндромами. Например, это можно сделать, сопоставив каждому пятизначному палиндрому $\overline{abcba}$ шестизначный палиндром $\overline{abccba}$. При этом у всех шестизначных палиндромов сумма цифр четна, а среди пятизначных есть палиндромы с нечетной суммой цифр.

Комментарий. Доказано, что палиндромов с 5 цифрами столько же, сколько палиндромов с 6 цифрами — 2 балла.

Доказано, что у палиндромов с 6 цифрами сумма цифр четна — 1 балл.

Доказано, что количество палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна, равно количеству палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна — 2 балла.

Доказано, что палиндромов с четной суммой цифр больше, но не найдено, во сколько раз — 1 балл.

В случае решения, использующего взаимно однозначное соответствие, показано, что палиндромов с четной суммой цифр больше — 4 балла.