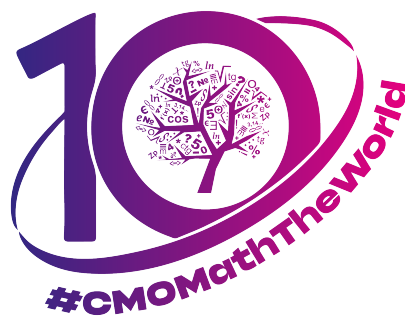


X Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий День 1



П. А. Кожевников
Д. А. Белов
К. А. Сухов
М. Сагафян

14–19 марта 2025 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

Юниоры. Первый день. Решения

1. Дома Ани и Вани расположены вдоль прямой дороги. Между их домами находятся школа и магазин, которые делят отрезок между домами на три равные части. Если Аня и Ваня выйдут из дома одновременно и пойдут навстречу друг другу, то они встретятся возле магазина. Если Аня поедет на самокате, увеличив тем самым свою скорость на 150 м/мин, то они встретятся возле школы. С какой скоростью ходит Ваня?

Белов Д.А.

Ответ: 100 м/мин.

Решение. Так как при пересадке на самокат Аня едет быстрее, то встреча должна произойти ближе к дому Ани. Поэтому, если идти от дома Ани к дому Вани, сначала встретится магазин, потом школа.

Когда ребята идут пешком, они встречаются возле магазина, таким образом, Аня проходит треть пути, а Ваня — две трети. Так как время движения одинаково, скорость Вани вдвое больше скорости Ани, обозначим их через $2v$ и v м/мин.

При поездке на самокате Аня проезжает две трети пути, а Ваня проходит треть. Значит, скорость Ани вдвое больше скорости Вани и равна $2 \cdot 2v = 4v$ м/мин. Скорость Ани увеличилась на $4v - v = 3v$ м/мин, что по условию составляет 150 м/мин. Отсюда $3v = 150$, $v = 50$, скорость Вани $2v = 2 \cdot 50 = 100$ м/мин.

2. По кругу стоят 30 детей. Для каждой девочки оказалось, что среди пяти человек, следующих за ней по часовой стрелке, мальчиков больше, чем девочек. Какое наибольшее количество девочек может стоять в круге?

Белов Д.А.

Ответ: 15.

Решение. В качестве примера с 15 девочками и 15 мальчиками можно взять конструкцию, в которой мальчики и девочки чередуются. Для каждой девочки среди пяти детей после неё по часовой стрелке будут 3 мальчика и 2 девочки, то есть условие соблюдается.

Оценим, что девочек не больше 15. Рассмотрим группу из 6 подряд идущих детей. Если в этой группе хотя бы 4 девочки, то для первой из этих девочек условие точно не соблюдается: остальные три девочки точно будут входить в пятёрку идущих после неё по часовой стрелке.

Разобьём всех детей на пять групп по 6 подряд идущих детей, в каждой группе девочек не больше 3, тогда всего девочек не больше $5 \cdot 3 = 15$.

3. Дано натуральное число K . У Егора есть 100 карточек, на которых написано число «2», и 100 карточек, на которых написано число «3». Егор хочет покрасить каждую карточку в красный или синий цвет так, чтобы ни в одной группе карточек одного цвета сумма чисел не равнялась K . При каком наибольшем K Егор не сможет так покрасить карточки?

Бакаев Е.В.

Ответ: 246.

Решение. *Пример 1.* Пусть 50 двоек синие и 50 троек синие (а остальные карточки — красные), так что сумма чисел каждого цвета равна 250. Этот пример показывает, что Егор выигрывает для $K > 250$ и для $K = 249$ (которое тоже, очевидно, нельзя набрать числами одного цвета).

Пример 2. Пусть все тройки красные, а все двойки синие. В таком случае сумма синих чисел не превысит 200, а любая сумма красных делится на 3. В частности, этот пример показывает, что Егор выигрывает для $K = 250$, $K = 248$ и $K = 247$.

Случай $K = 246$. Покажем, что как бы Егор не красил карточки, мы сможем набрать одноцветную сумму, равную K . Не умаляя общности, считаем, что сумма всех красных чисел не меньше 250. Покажем вначале, как набрать красными числами сумму, не меньшую 246 и кратную 3.

Если нет ни одной красной двойки, то сумма всех красных чисел уже кратна 3. Если у нас ровно одна красная двойка, то выбросим ее, останется сумма всех красных чисел, кратная 3 и троек не меньшая $250 - 2 = 248$. Если же красных двоек хотя бы две, то выбросив 0, 1 или 2 из них, добьемся того, что сумма оставшихся красных чисел будет делиться на 3. При этом их сумма будет не меньше, чем $250 - 2 - 2 = 246$.

Итак, у нас сумма красных чисел, не меньшая 246 и кратная 3. Начнем выбрасывать из нее тройки одну за одной. Когда-то мы дойдем до 246. В самом деле, тройки до этого не закончатся, так как если бы они закончились, наша текущая сумма была бы не больше 200, что меньше 246.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны, они пересекаются в точке E . Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P , лежащей внутри треугольника AED , а серединные перпендикуляры к сторонам BC и DA пересекаются в точке Q , лежащей внутри треугольника CED . Докажите, что $\angle PEQ = 90^\circ$.

Осипов А.В.

Решение. Из условия следует, что $PA = PB$ и $PC = PD$. Поскольку $AC = BD$, имеем равенство треугольников PAC и PBD . В этих равных треугольниках равны высоты, проведенные из P к AC и к BD . Видим, что P равноудалена от прямых AC и BD , поэтому P лежит на биссектрисе угла AED .

Аналогично, Q лежит на биссектрисе угла CED . Отсюда $EP \perp EQ$ как биссектрисы смежных углов.

Замечание. Отметим, что точка P может быть также описана как центр поворота, переводящего $\overrightarrow{AC}$ в $\overrightarrow{BD}$. Аналогично, Q — это центр поворота, переводящего $\overrightarrow{AC}$ в $\overrightarrow{DB}$.

Сеньоры. Первый день. Решения

1. Для данных натуральных чисел a и b рассмотрим уравнение

$$a + \text{НОД}(b, x) = b + \text{НОД}(a, x).$$

а) Пусть $a = 20$, $b = 25$. Найдите наименьшее натуральное x , удовлетворяющее этому уравнению.

б) Докажите, что для любых натуральных a и b существует бесконечно много натуральных x , удовлетворяющих этому уравнению.

(Как обычно, $\text{НОД}(m, n)$ обозначает наибольший общий делитель натуральных чисел m и n .)

Агаханов Н.Х.

Решение. а) Ответ: 100. При $a = 20$, $b = 25$ уравнение принимает вид: $\text{НОД}(25, x) = 5 + \text{НОД}(20, x)$. Так как $\text{НОД}(20, x) \geq 1$, то $\text{НОД}(25, x) \geq 6$. С другой стороны, $\text{НОД}(25, x)$ — это делитель числа 25, т.е. одно из чисел 1, 5, 25. Остается единственный вариант $\text{НОД}(25, x) = 25$, иначе говоря, x обязан делиться на 25. Подставляя в исходное уравнение, получаем $\text{НОД}(20, x) = 25 - 5 = 20$, значит, x обязан делиться на 20. Тем самым x должен делиться и на 25, и на 20, а значит, и на их НОК($20, 25$) = 100, откуда $x \geq 100$. С другой стороны, $x = 100$ подходит.

б) Подходит любое натуральное x , делящееся на a и на b . Действительно, в таком случае $\text{НОД}(a, x) = a$ и $\text{НОД}(b, x) = b$. Но таких x , очевидно, бесконечно много.

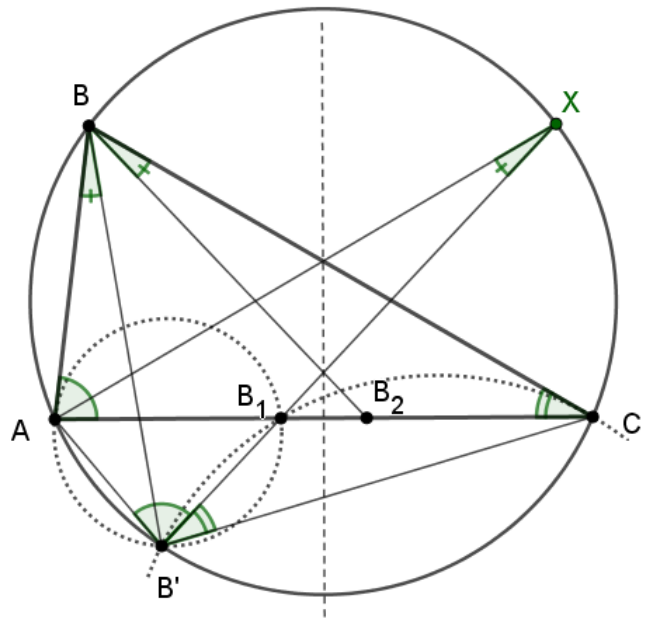
2. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки B_1 и B_2 , симметричные относительно середины этой стороны. Окружность γ_a проходит через B_1 и касается прямой AB в точке A . Аналогично окружность γ_c проходит через точку B_1 и касается прямой BC в точке C . Пусть окружности γ_a и γ_c вторично пересекаются в точке B' (отличной от B_1). Докажите, что $\angle AB'B' = \angle CB'B_2$.

Емельянов Л.А.

Решение. Из касаний имеем $\angle AB'B_1 = \angle BAC$ и $\angle CB'B_1 = \angle BCA$. Тогда $\angle AB'C$ равен сумме углов $\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC$. Отсюда следует, что B' лежит на окружности (ABC) .

Далее, пусть $B'B_1$ повторно пересекает окружность (ABC) в точке X . Как мы знаем, $\angle AB'X = \angle BAC$. Из равенства этих вписанных углов следует равенство соответствующих дуг AX и BC , откуда следует, что точки B и X симметричны относительно серединного перпендикуляра ℓ к стороне AC .

Точки B_1 и B_2 симметричны относительно ℓ ; из этой симметрии $\angle CB'B_2 = \angle AXB_1$. Но $\angle AXB_1 = \angle AXB' = \angle AB'B'$ (в последнем равенстве использована окружность $(ABXB')$). Таким обра-



зом, $\angle CBB_2 = \angle ABB'$, что и требовалось.

Замечание. В задаче мы видим геометрическую связь между *изогональным* и *изотомическим* сопряжениями в треугольнике.

Также утверждение задачи связано со следующим известным фактом. Пусть M — точка Микеля четырехугольника $ABCD$. Тогда направление, изогональное BM относительно угла ABC , параллельно прямой Гаусса (т.е. прямой, проходящей через середины AC и BD). В нашем случае B' — точка Микеля для вырожденного четырехугольника $ABCB_1$.

3. На доске нарисована окружность и на ней отмечены $2n$ точек, делящие ее на $2n$ равных дуг. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает натуральное число $d \leq n$ и объявляет это число Васе. После этого для победы Васе нужно покрасить все отмеченные точки в n цветов, в каждый цвет — ровно две точки, так, чтобы для каждой пары одноцветных точек на одной из дуг между ними было ровно $(d-1)$ отмеченных точек. Найдите все n , для которых Петя сможет помешать Васе выиграть.

Saghafian M.

Ответ: Все n , не равные степени двойки.

Решение. Пронумеруем отмеченные точки подряд остатками при делении на $2n$ ($0, 1, 2, \dots, 2n-1$), начиная с некоторой точки.

1) Покажем, что для $n = 2^m$ при любом $d \leq n$ Вася сможет победить, разбив нужным образом остатки на (одноцветные) пары.

Пусть для данного d он пойдет по кругу и будет создавать пары $(0, d)$, $(2d, 3d)$, $(4d, 5d)$, и т.д., пока в ряду $0, d, 2d, \dots$ впервые не возникло повторение остатка. Пусть первое повторение — это sd . Повторение $sd \equiv td \pmod{2n}$, где $t > 0$, невозможно, так как иначе $(s-1)d \equiv (t-1)d \pmod{2n}$, и повторение уже случилось шагом ранее. Тогда $sd \equiv 0 \pmod{2n}$, т.е. $sd : 2^{m+1}$. Минимальное натуральное s с таким свойством — это $\frac{2^{m+1}}{\text{НОД}(d, 2^{m+1})}$ — степень двойки, большая $2^0 = 1$. Значит, s четно. Поэтому образуется цикл (четной длины) $(0, d, 2d, \dots, (s-1)d)$, в котором все остатки разбиты нужным образом на пары.

Так, все остатки разобьем на такие непересекающиеся циклы длины s (совмещаемые поворотами окружности), а в каждом цикле разобьем нужным образом остатки на пары.

2) Пусть $n = 2^m \cdot t$, где $t \geq 3$ — нечетное число. Покажем, что Вася проиграет, если названо число $d = 2^{m+1}$ (оно, очевидно, меньше n). Предположим, Вася все же сделал требуемое разбиение на пары. Не умаляя общности, считаем, что одна из его пар — это $(0, d)$ (к этому случаю можно прийти, повернув нужным образом окружность). Заметим, что остаток $2d$ может быть соединен только с $3d$, так как $d = 2d - d$ уже занят. Рассуждая так далее, однозначно восстанавливаем пары $(0, d)$, $(2d, 3d)$, $(4d, 5d)$, $\dots$, $((t-1)d, td)$. Но $td = 2^{m+1} \cdot t \equiv 0 \pmod{2n}$ уже занят. Противоречие.

4. Существуют ли непостоянные многочлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ с вещественными

коэффициентами и старшим коэффициентом 1, такие что каждый из многочленов

$$P(Q(x)), Q(R(x)), R(P(x))$$

имеет хотя бы один вещественный корень, но ни один из многочленов

$$Q(P(x)), R(Q(x)), P(R(x))$$

не имеет вещественных корней?

Saghafian M.

Ответ: Не существует.

Решение. Предположим противное, и такие многочлены P, Q, R существуют.

1) Пусть x_0 — корень многочлена $P(Q)$; тогда $P(Q(x_0)) = 0$, значит, $Q(x_0)$ — корень многочлена P . Видим, что P имеет корни, и пусть α — его максимальный корень.

Аналогично показываем, что Q и R имеют корни; обозначим через β и γ соответственно их максимальные корни.

2) Рассмотрим уравнение $P(x) = \beta$. Если бы оно имело корень, то этот корень являлся бы корнем уравнения $Q(P(x)) = 0$, которое, согласно условию, не имеет корней. Видим, что β не входит в множество значений многочлена P . В частности, отсюда следует, что P имеет четную степень (поскольку множество значений многочлена нечетной степени — это $\mathbb{R}$). Итак, P — многочлен четной степени со старшим коэффициентом 1, значит его множеством значений является луч вида $[a, +\infty)$. Причем из сказанного выше следует, что $\beta < a$.

Проводя аналогичные рассуждения для Q и R , понимаем, что множеством их значений являются соответственно лучи $[b, +\infty)$ и $[c, +\infty)$. При этом $\gamma < b$ и $\alpha < c$.

3) Вернемся к x_0 — некоторому корню многочлена $P(Q)$. Тогда $Q(x_0)$ — корень многочлена P . Тогда $Q(x_0) \leq \alpha$ (так как α — максимальный корень P). С другой стороны, $Q(x_0)$ принадлежит множеству значений Q , поэтому $Q(x_0) \geq b$. Следовательно, $b \leq \alpha$. Аналогично $c \leq \beta$ и $a \leq \gamma$.

Таким образом, мы получили $\beta < a \leq \gamma < b \leq \alpha < c \leq \beta$. Отсюда $\beta < \beta$ — противоречие.