III Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 15–20 марта 2018 года

Юниоры. Первый день

16 марта

1. Даны действительные числа a, b и c, не все из которых равны между собой. Докажите, что равенство $a+b+c=0$ выполнено тогда и только тогда, когда $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$.

2. На шахматной доске 8×8 стоит $n>6$ коней. Известно, что какие бы 6 коней ни выбрать, среди них найдутся два, бьющих друг друга. Какое наибольшее значение может принимать число n?

3. Даны натуральные числа a, b и c. Известно, что b^c делится на a^b, а также c^b делится на a^c. Докажите, что bc делится на a^2.

4. *Центроидом* четырехугольника будем называть точку пересечения двух прямых, соединяющих середины его противоположных сторон. Дан шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в окружность Ω с центром O. Известно, что $AB=DE$ и $BC=EF$. Пусть X, Y и Z — центроиды четырехугольников $ABDE$, $BCEF$ и $CDFA$ соответственно. Докажите, что высоты треугольника XYZ пересекаются в точке O.

Юниоры. Второй день

17 марта

5. Барон Мюнхгаузен придумал новую теорему: «Для любых натуральных чисел a и b существует натуральное число n такое, что an является квадратом некоторого натурального числа, а bn — кубом какого-то натурального числа.» Верна ли данная теорема?

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BCD = 90^\circ$. Пусть E — середина AB. Докажите, что $2EC \leqslant AD + BD$.

7. Дано натуральное $n > 1$. На изначально пустую доску $n \times n$ одна за другой выставляются фишки. Фишку можно ставить только в свободную клетку, которая граничит по стороне хотя бы с двумя свободными клетками. Какое наибольшее число фишек мы можем выставить на доску по таким правилам?

8. Пусть a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$(a+b)\sqrt{ab} + (a+c)\sqrt{ac} + (b+c)\sqrt{bc} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2}.$$

Сеньоры. Первый день

16 марта

1. Можно ли какие-нибудь 10 последовательных натуральных чисел расположить на каркасе тетраэдра — по одному числу в вершинах и по одному числу в серединах рёбер — так, чтобы в середине каждого ребра стояло среднее арифметическое чисел, записанных на концах этого ребра?

2. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки P, Q, R выбраны на сторонах AB, BC, CA соответственно так, что $AP = AR$ и $BP = BQ$, а $\angle PIQ = \angle BAC$. Докажите, что $QR \perp AC$.

3. Назовем способ разбиения множества из $2n$ натуральных чисел на n пар *бесквадратным*, если ни в одной паре произведение чисел не является квадратом натурального числа. Известно, что для данных $2n$ различных натуральных чисел существует бесквадратный способ разбиения на пары. Докажите, что тогда существует не менее $n!$ бесквадратных способов разбиения этих $2n$ чисел на пары. (Через $n!$ обозначено произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

4. В каждую клетку таблицы $n \times n$ Мортеза поместил некоторую функцию $[0, 1] \to [0, 1]$ (т. е. всего n^2 функций, каждая из которых определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает значения из отрезка $[0, 1]$). Павел хочет поместить слева от каждой строки и снизу под каждым столбцом ещё по одной функции $[0, 1] \to [0, 1]$ (то есть ещё $2n$ функций) так, чтобы для любой строки и любого столбца было выполнено следующее условие: если под этим столбцом помещена функция f, слева от строки помещена функция g, а в пересечении этого столбца и этой строки помещена функция h, то для любого $x \in [0; 1]$ верно равенство $h(x) = f(g(x))$. Докажите, что Павел всегда сможет осуществить свой замысел.

Сеньоры. Второй день

17 марта

5. Барон Мюнхгаузен придумал новую теорему: «Для любых натуральных чисел a и b существует натуральное число n такое, что an является кубом некоторого натурального числа, а bn — пятой степенью какого-то натурального числа.» Верна ли данная теорема?

6. Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в точках A и B. Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB, которые пересекают второй график в точках C и D. Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс.

7. Высоты, проведенные из вершин A, B и C остроугольного треугольника ABC, пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, а также пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает описанные окружности треугольников AC_1C_2 и CA_1A_2 в точках P и Q, отличных от A_1 и C_1. Докажите, что окружность PQB_1 касается прямой AC.

8. На изначально пустую доску 8×8 одна за другой выставляются фишки. Фишку можно ставить только в свободную клетку, которая граничит по стороне хотя бы с тремя свободными клетками. Какое наибольшее число фишек мы можем выставить на доску по таким правилам?