III Кавказская математическая олимпиада

# Решения заданий
# День 1

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
В. А. Брагин
Д. А. Белов
А. В. Антропов
Л. А. Емельянов
А. А. Полянский
М. Сагафиян
С. И. Токарев

15–20 марта 2018 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

# 1. Юниоры

*16 марта*

**1.** Даны действительные числа $a$, $b$ и $c$, не все из которых равны между собой. Докажите, что равенство $a+b+c=0$ выполнено тогда и только тогда, когда $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$.

*Антропов А. В.*

**Решение.** Рассмотрим разность $(b^2+bc+c^2)-(c^2+ca+a^2)=b^2+bc-ca-a^2=$ $=(b-a)(b+a+c)$. Если $a+b+c=0$, то эта разность равна 0, значит, выражения равны. Аналогично доказываются два других равенства.

В другую сторону, если выполнено $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$, то выберем из $a$, $b$ и $c$ два числа, не равных друг другу. Пусть это $a$ и $b$. Тогда рассматриваемая разность $(b^2+bc+c^2)-(c^2+ca+a^2)=(b-a)(b+a+c)=0$, при этом $b-a\neq 0$. Значит, $a+b+c=0$, что и требовалось доказать.

**2.** На шахматной доске $8\times 8$ стоит $n>6$ коней. Известно, что какие бы 6 коней ни выбрать, среди них найдутся два, бьющих друг друга. Какое наибольшее значение может принимать число $n$?

*Ефремов Р. С.*

**Ответ.** 10. **Решение.** *Оценка.* Пусть на доску поставлено 11 или более коней. Тогда среди них найдутся 6, стоящих на клетках одного цвета. Эти 6 коней друг друга не бьют, что противоречит условию.

*Пример* на 10 коней получается так: выделим 5 пар клеток черная-белая, соединенных ходом коня (например, клетки $a1-a5$ и клетки $c2-c6$), и поставим коней на эти 10 клеток. Тогда среди любых 6 коней найдутся два коня из одной пары, именно они и будут друг друга бить.

**3.** Даны натуральные числа $a$, $b$ и $c$. Известно, что $b^c$ делится на $a^b$, а также $c^b$ делится на $a^c$. Докажите, что $bc$ делится на $a^2$.

*Saghafian M.*

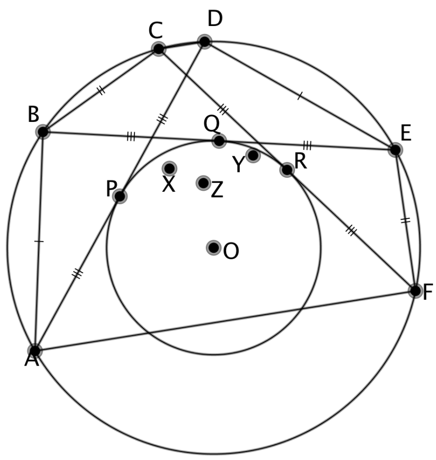
**Решение 1.** Из того, что $b^c$ делится на $a^b$, после возведения обоих выражений в степень $c$ следует, что $b^{bc}$ делится на $a^{b^2}$. Аналогично $c^{bc}$ делится на $a^{c^2}$. Перемножив эти два условия, получаем, что $(bc)^{bc}$ делится на $a^{b^2+c^2}$. По неравенству между средним арифметическим и геометрическим для двух чисел, $2bc\leqslant b^2+c^2$. Поэтому $a^{b^2+c^2}$ делится на $a^{2bc}$, значит, и $(bc)^{bc}$ делится на $a^{2bc}$. Это и означает, что $bc$ делится на $a^2$.

**Решение 2.** Пусть $a={p_1}^{a_1}\cdot {p_2}^{a_2}\cdot\ldots\cdot {p_k}^{a_k}$, $b={p_1}^{b_1}\cdot {p_2}^{b_2}\cdot\ldots\cdot {p_k}^{b_k}$, $c={p_1}^{c_1}\cdot {p_2}^{c_2}\cdot\ldots\cdot {p_k}^{c_k}$, где $a_i$, $b_i$ и $c_i$ могут быть нулями. Из условий делимости нам известно, что для любого $1\leqslant i\leqslant k$ выполнено $b\cdot a_i\leqslant c\cdot b_i$ и $c\cdot a_i\leqslant b\cdot c_i$. Перемножая эти два неравенства, получаем $bc\cdot {a_i}^2\leqslant bc\cdot b_i\cdot c_i$, поэтому $a_i^2\leqslant b_i\cdot c_i$. По неравенству о средних, $b_i\cdot c_i\leqslant \frac{(b_i+c_i)^2}{4}$. Таким образом, для каждого $i$ имеем $4a_i^2 \leqslant (b_i + c_i)^2$, поэтому $2a_i \leqslant b_i + c_i$, откуда и следует, что $bc$ делится на $a^2$.

**4.** *Центроидом* четырехугольника будем называть точку пересечения двух прямых, соединяющих середины его противоположных сторон. Дан шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в окружность $\Omega$ с центром $O$. Известно, что $AB = DE$ и $BC = EF$. Пусть $X$, $Y$ и $Z$ — центроиды четырехугольников $ABDE$, $BCEF$ и $CDFA$ соответственно. Докажите, что высоты треугольника $XYZ$ пересекаются в точке $O$.

*Полянский А. А., Jiang Z.*

**Решение.** Нам понадобится вспомогательное *утверждение*: центроид четырехугольника является серединой отрезка, соединяющего середины его диагоналей.




Докажем это утверждение. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — данный четырехугольник, а $M_{ij}$ — середина отрезка $A_iA_j$ (для всех пар индексов). Тогда $M_{12}M_{13}$ — средняя линия треугольника $A_1A_2A_3$, поэтому $M_{12}M_{13} \parallel A_2A_3$. Аналогично $M_{42}M_{43} \parallel A_2A_3$, поэтому $M_{12}M_{13} \parallel M_{42}M_{43}$. Таким же образом доказывается параллельность $M_{12}M_{42}$ и $M_{13}M_{43}$. Значит, $M_{12}M_{13}M_{43}M_{42}$ — параллелограмм, тем самым середина отрезка $M_{13}M_{24}$ лежит на прямой $M_{12}M_{34}$. Аналогично, середина $M_{13}M_{24}$ лежит на прямой $M_{23}M_{41}$, таким образом, эта середина является центроидом. Утверждение доказано.

Перейдем к решению задачи. Проведем диагонали $AD$, $BE$, $CF$; пусть $P$, $Q$, $R$ соответственно — их середины. Согласно нашему утверждению, середины отрезков $PQ$, $QR$, $RP$ и есть центроиды четырехугольников $ABDE$, $BCEF$, $CDFA$. Итак, $X$, $Y$, $Z$ — соответственно середины отрезков $PQ$, $QR$, $RP$.

Из равенства отрезков $AB = DE$ и $BC = EF$ следует равенство дуг, откуда $AD = BE = CF$, значит, $P$, $Q$ и $R$ равноудалены от $O$. Тогда $OX$ — серединный перпендикуляр к $PQ$. Так как $YZ \parallel PQ$ как средняя линия, то $OX \perp YZ$. Аналогично $OY \perp XZ$, значит $O$ — ортоцентр треугольника $XYZ$.

**Замечание.** То же решение можно записать на языке векторов.

# 2. Сеньоры

*16 марта*

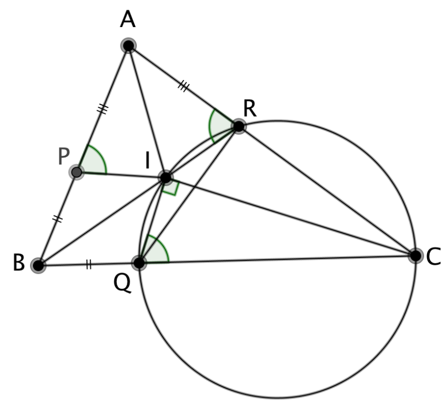
**1.** Можно ли какие-нибудь 10 последовательных натуральных чисел расположить на каркасе тетраэдра — по одному числу в вершинах и по одному числу в серединах рёбер — так, чтобы в середине каждого ребра стояло среднее арифметическое чисел, записанных на концах этого ребра?

*Емельянов Л. А.*

**Ответ.** Нет, нельзя. **Решение.** Предположим, что это возможно. Максимальное число не может находиться в середине ребра, так как число на одном из концов этого ребра больше него. Тем самым, максимальное число находится в одной из вершин; пусть это вершина $A$. Аналогично минимальное число находится в некоторой вершине $B$. Но поскольку максимальное и минимальное числа разной четности, в середине ребра $AB$ должно стоять нецелое число. Противоречие.

**2.** Пусть $I$ — центр вписанной окружности остроугольного треугольника $ABC$. Точки $P$, $Q$, $R$ выбраны на сторонах $AB$, $BC$, $CA$ соответственно так, что $AP = AR$ и $BP = BQ$, а $\angle PIQ = \angle BAC$. Докажите, что $QR \perp AC$.

*По мотивам Крымского С.*




**Решение.** Поскольку $BP = BQ$ и $\angle PBI = \angle QBI$, треугольники $IPB$ и $IQB$ симметричны относительно прямой $BI$. Аналогично треугольники $IPA$ и $IRA$ симметричны относительно прямой $AI$. Отсюда $\angle IQC = \angle IPA = \angle IRA$. Значит, четырехугольник $CQIR$ — вписанный.

Угол $PIQ$ четырехугольника $BPIQ$ равен углу $BAC$. (Другая возможность состоит в том, что четырехугольник $BPIQ$ невыпуклый, и в нем угол при вершине $I$ больше развернутого. Но тогда $\angle PIQ$ выпуклого пятиугольника $ACQIP$ равен $\angle BAC$, а с другой стороны он больше, чем $\angle AIC > 90°$, что противоречит условию.) Поэтому $\angle PIB = \angle QIB = \frac{\angle A}{2}$, тогда $\angle CIQ = \angle CIB - \angle QIB = (90° + \frac{\angle A}{2}) - \frac{\angle A}{2} = 90°$. Из вписанного четырехугольника $CQIR$ имеем $\angle CRQ = \angle CIQ = 90°$, что и требовалось доказать.

**3.** Назовем способ разбиения множества из $2n$ натуральных чисел на $n$ пар *бесквадратным*, если ни в одной паре произведение чисел не является квадратом натурального числа. Известно, что для данных $2n$ различных натуральных чисел существует бесквадратный способ разбиения на пары. Докажите, что тогда существует не менее $n!$ бесквадратных способов разбиения этих $2n$ чисел на пары. (Через $n!$ обозначено произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

*Кожевников П. А.*

**Решение.** Каждому натуральному числу $m$ поставим в соответствие множество простых чисел $P(m)$, каждое из которых входит в разложение числа $m$ в нечетной степени. Например, $P(2^3 \cdot 7^8 \cdot 11) = \{2, 11\}$, $P(3^4 \cdot 5^6) = \varnothing$. Очевидно, произведение натуральных $a$ и $b$ является точным квадратом тогда и только тогда, когда множества $P(a)$ и $P(b)$ совпадают.

Покрасим данные $2n$ чисел таким образом: числа, для которых множества $P(m)$ совпадают, окрасим в один и тот же цвет, а для которых множества $P(m)$ отличаются — в разные цвета. Поскольку существует бесквадратное разбиение на пары, в каждый цвет покрашено не более $n$ чисел. Докажем следующую лемму, из которой сразу последует решение задачи.

*Лемма.* Пусть $2n$ (различных) объектов покрашены в несколько цветов так, что в каждый цвет покрашено не более $n$ объектов. Тогда существует не менее $n!$ способов разбить эти объекты на *разноцветные* пары (т. е. так, чтобы в каждой паре были объекты разных цветов).

*Доказательство леммы.* Индукция по $n$. База для $n = 1$ очевидна. Докажем переход от $n-1$ к $n$. Выберем цвет $c$, который встречается среди данных объектов наибольшее количество раз, т. е. пусть имеется $k$ объектов цвета $c$, а объектов любого другого цвета не более $k$. Возьмем объект $A$ цвета $c$ и подберем для него пару $B$ любого цвета $d$, отличного от $c$; это можно сделать $2n - k$ способами. При этом $2n - k \geqslant n$, так как $k \leqslant n$. Удалив пару $A, B$, мы получаем множество из $2(n-1)$ объектов. Проверим, что их покраска удовлетворяет условию леммы. Действительно, предположим противное, и объектов какого-то цвета $e$ не меньше $n$. Цвет $e$ отличен от $c$ и $d$, так как после удаления $A$ и $B$ объектов этих цветов осталось не более $n-1$. Тогда $k \geqslant n$, и до удаления объектов $A$ и $B$ цвета $c$ и $e$ занимали по $n$ объектов — противоречие, ведь по меньшей мере еще есть объект $B$ цвета $d$. Таким образом, на каждый способ выбрать объект $B$ для полученного множества из $2(n-1)$ элементов, согласно предположению индукции, имеется не менее $(n-1)!$ разбиений на разноцветные пары. Итого для множества из $2n$ элементов — не менее $n \cdot (n-1)!$ разбиений на разноцветные пары.

**4.** В каждую клетку таблицы $n \times n$ Мортеза поместил некоторую функцию $[0, 1] \to [0, 1]$ (т. е. всего $n^2$ функций, каждая из которых определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает значения из отрезка $[0, 1]$). Павел хочет поместить слева от каждой строки и снизу под каждым столбцом ещё по одной функции $[0, 1] \to [0, 1]$ (то есть ещё $2n$ функций) так, чтобы для любой строки и любого столбца было выполнено следующее условие: если под этим столбцом помещена функция $f$, слева от строки помещена функция $g$, а в пересечении этого столбца и этой строки помещена функция $h$, то для любого $x \in [0;1]$ верно равенство $h(x) = f(g(x))$. Докажите, что Павел всегда сможет осуществить свой замысел.

*Saghafian M.*

**Решение.** Обозначим функцию, стоящую в пересечении $i$-ой строки и $j$-го столбца, через $h_{ij}$. Наша цель — подобрать функции $f_1, f_2 \dots f_n$ для строк и функции $g_1, g_2 \dots g_n$ для столбцов так, чтобы для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ было выполнено тождество $h_{ij}(x) = f_i(g_j(x))$.

Расположим внутри отрезка $[0;1]$ $n$ непересекающихся отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\dots$ $[a_n, b_n]$. Сделаем функции $g_j$ линейными так, чтобы $g_j(0) = a_j$ и $g_j(1) = b_j$, то есть $g_j(x) = (b_j - a_j)x + a_j$. Теперь нужно определить функции $f_i$. Так как $g_j(x) \in [a_j; b_j]$, то тождество $h_{ij}(x) = f_i(g_j(x))$ однозначно определяет значения функции $f_i$ на этом самом отрезке. Действительно, если $x_0 \in [a_j; b_j]$, то для некоторого $x_1$ выполнено $g_j(x_1) = x_0$, а именно для $x_1 = \dfrac{x_0 - a_j}{b_j - a_j}$. Тогда $f_i(x_0) = h_{ij}(x_1)$.

Пробегая по всем $j$, находим значения $f_i$ на всех отрезках $[a_j, b_j]$. Так как отрезки не пересекаются, то такую функцию $f_i$ подобрать можно. Вне выделенных отрезков определим значение $f_i$ равным нулю.

Выполнение всех тождеств $h_{ij}(x) = f_i(g_j(x))$ следует непосредственно из построения примера.