III Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

КАВКАЗСКАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА

CAUCASUS
MATHEMATIC
OLYMPIAD

Д. К. Мамий
П. А. Кожевников
В. А. Брагин
Д. А. Белов
А. В. Антропов
Л. А. Емельянов
А. А. Полянский
М. Сагафиян
С. И. Токарев

15–20 марта 2017 г.
г. Майкоп
Республика Адыгея

1. Юниоры

17 марта

5. Барон Мюнхгаузен придумал новую теорему: «Для любых натуральных чисел a и b существует натуральное число n такое, что an является квадратом некоторого натурального числа, а bn — кубом какого-то натурального числа.» Верна ли данная теорема?

Бакаев Е. В.

Ответ. Да, верна. **Решение 1.** Заметим, что число $n = a^3b^2$ подходит. Действительно, $an = a^4b^2 = (a^2b)^2$, а $bn = a^3b^3 = (ab)^3$.

Решение 2. Для того, чтобы число было квадратом, достаточно, чтобы каждый его простой делитель входил в разложение числа в четной степени. Аналогично для того, чтобы число было кубом, достаточно, чтобы каждый его простой делитель входил в разложение числа в степени, делящейся на 3.

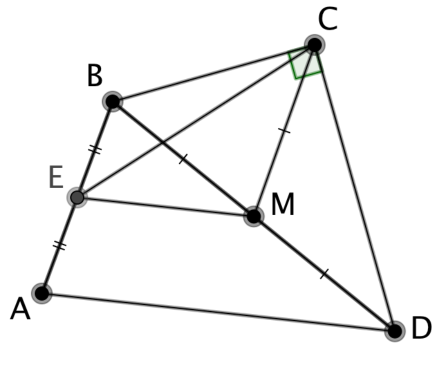
Рассмотрим любое простое число p_i, являющееся делителем хотя бы одного из чисел a и b. Пусть максимальная степень p_i, на которую делится число a, равна α_i, а максимальная степень p_i, на которую делится число b, равна β_i. Так как числа от 1 до 6 дают все возможные пары остатков при делении на 2 и на 3, то выберем среди них такое k_i, чтобы $\alpha_i + k_i$ делилось на 2, а $\beta_i + k$ делилось на 3. Найдем такие k_i для всех простых делителей чисел a и b, и перемножим выражения вида $p_i^{k_i}$. Тогда такое произведение подходит в качестве числа n.

Замечание. Вообще, такое n найдется не только для пары 2 и 3, но и для любой пары взаимно простых чисел.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BCD = 90°$. Пусть E — середина AB. Докажите, что $2EC \leqslant AD + BD$.

Белов Д. А.

Решение 1. Отметим точку M — середину BD. По неравенству треугольника, $EC \leqslant CM + ME$. Меж тем $2CM = BD$ как медиана прямоугольного треугольника BDC, проведенная к гипотенузе из вершины прямого угла C. Далее, ME — средняя линия в треугольнике ABD, поэтому $2ME = AD$. Домножим неравенство $EC \leqslant CM + ME$ на 2 и заменим $2CM$ на BD, а $2ME$ на AD. Получим, что $2EC \leqslant AD + BD$, что и требовалось доказать.



Решение 2. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно C. Тогда EC — средняя линия треугольника ABB', поэтому $2EC = AB'$. С другой

стороны, $AB' \leqslant AD + DB'$. Из симметрии $DB' = DB$, отсюда окончательно $2EC = AB' \leqslant AD + DB$.

7. Дано натуральное $n > 1$. На изначально пустую доску $n \times n$ одна за другой выставляются фишки. Фишку можно ставить только в свободную клетку, которая граничит по стороне хотя бы с двумя свободными клетками. Какое наибольшее число фишек мы можем выставить на доску по таким правилам?

Белов Д. А.

Ответ. $n^2 - n$. **Решение.** *Оценка.* Введем вспомогательный граф, вершинами которого будут клетки, а ребра проводятся между вершинами, у которых соответствующие им клетки граничат по стороне (другое рассуждение без явного введения графа можно посмотреть в решении задачи **10-11.8**). Как только фишка ставится в очередную клетку, будем удалять все ребра, выходящие из соответствующей вершины. Заметим, что тем самым будут удаляться в точности ребра между вершиной, куда ставят фишку, и ее свободными соседями. Значит, после каждого выставления фишки должно удаляться не менее двух ребер.

Посчитаем общее количество ребер во введенном графе. Это количество перегородок между клетками; вертикальных перегородок $n(n-1)$, и столько же горизонтальных, поэтому ребер в графе $2n^2 - 2n$.

Так как при выставлении одной фишки мы должны удалить хотя бы два ребра, то количество выставленных на доску фишек не превосходит $\frac{2n^2-2n}{2}$, то есть $n^2 - n$.

Пример. Назовем диагональ доски, идущую из левого верхнего угла в правый нижний, *главной*. Будем выставлять фишки диагоналями, идя от диагонали, состоящей из одной клетки, к главной. На очередную диагональ фишки можно выставлять в любом порядке. Главную диагональ при этом не заполняем.

Замечание. Если мы рассмотрим обратный отсчет времени и, наоборот, будем удалять фишку, если она граничит хотя бы с двумя свободными клетками, то задача станет эквивалентна известной задаче о бурьяне, смотрите задачу 79493 на `problems.ru`.

8. Пусть a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$(a+b)\sqrt{ab} + (a+c)\sqrt{ac} + (b+c)\sqrt{bc} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2}.$$

Труфанова Е. А.

Решение 1. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим,

$$(a+b)\sqrt{ab}+(a+c)\sqrt{ac}+(b+c)\sqrt{bc} \geqslant 2(\sqrt{ab})^2+(\sqrt{ac})^2+(\sqrt{bc})^2) = 2(ab+bc+ca).$$

Таким образом, достаточно доказать, что $4(ab+bc+ca) \geqslant (a+b+c)^2$. После раскрытия скобок и сокращения остается эквивалентное неравенство $2(ab+bc+ca) \geqslant a^2+b^2+c^2$. Но $ab+bc = b(a+c) > b^2$, $ac+bc = c(a+b) > c^2$, $ab+ac = a(b+c) > a^2$; складывая три указанных неравенства, получаем требуемое.

Решение 2. Без ограничения общности будем считать, что a — наибольшая сторона. Тогда

$$2(a+b)\sqrt{ab}+2(a+c)\sqrt{ac}+2(b+c)\sqrt{bc} \geqslant 2(a+b)b+2(a+c)c+4\sqrt{bc}\sqrt{bc}.$$

В свою очередь, правая часть предыдущего неравенства преобразуется как

$$2ab+2ac+2bc+b^2+c^2+(b^2+c^2+2bc) = 2ab+2ac+2bc+b^2+c^2+(b+c)^2.$$

Так как по неравенству треугольника $b+c > a$, то выражение выше больше, чем

$$2ab+2ac+2bc+b^2+c^2+a^2 = (a+b+c)^2,$$

что и требовалось доказать.

2. Сеньоры *17 марта*

5. Барон Мюнхгаузен придумал новую теорему: «Для любых натуральных чисел a и b существует натуральное число n такое, что an является кубом некоторого натурального числа, а bn — пятой степенью какого-то натурального числа.» Верна ли данная теорема?

Бакаев Е. В.

Ответ. Да, верна. **Решение 1.** Заметим, что число $n = a^5b^9$ подходит. Действительно, $an = a^6b^9 = (a^2b^3)^3$, а $bn = a^5b^{10} = (ab^2)^5$.

Решение 2. Для того, чтобы число было кубом, достаточно, чтобы каждый его простой делитель входил в разложение числа в степени, делящейся на 3. Аналогично для того, чтобы число было пятой степенью, достаточно, чтобы каждый его простой делитель входил в разложение числа в степени, делящейся на 5.

Рассмотрим любое простое число p_i, являющееся делителем хотя бы одного из чисел a и b. Пусть максимальная степень p_i, на которую делится число a, равна α_i, а максимальная степень p_i, на которую делится число b, равна β_i. Так как числа от 1 до 15 дают все возможные пары остатков при делении на 3 и на 5, то выберем среди них такое k_i, чтобы $\alpha_i + k_i$ делилось на 3, а $\beta_i + k$ делилось на 5. Найдем такие k_i для всех простых делителей чисел a и b, и перемножим выражения вида $p_i^{k_i}$. Тогда такое произведение подходит в качестве числа n.

Замечание. Вообще, такое n найдется не только для пары 3 и 5, но и для любой пары взаимно простых чисел.

6. Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в точках A и B. Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB, которые пересекают второй график в точках C и D. Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс.

Антропов А. В.

Решение. Обозначим график первого из квадратных трехчленов через G_1, а график второго — G_2. Для начала перенесём всю картинку таким образом, чтобы точка O совпала с началом координат. Рассмотрим такое сжатие всей картинки к оси абсцисс, чтобы G_1 совпал с графиком функции $y = x^2$. Пусть точка A имеет координаты (a, a^2), точка B — координаты (b, b^2). Заметим, что разность квадратных трёхчленов, задающих графики G_1 и G_2, есть квадратный трёхчлен, который обращается в ноль в точках a и b. Из этого следует, что график G_2 задаётся уравнением $y = x^2 + k(x-a)(x-b)$ для некоторого действительного $k \neq 0, -1$.

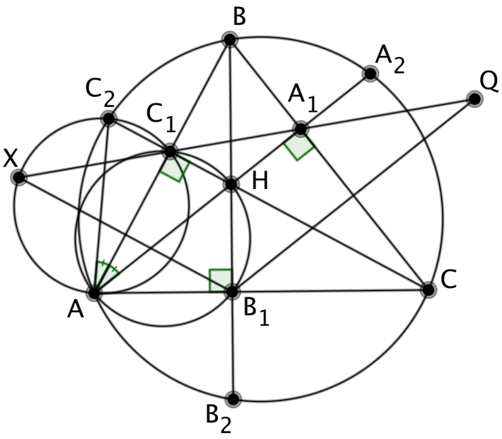
Прямая OA задаётся уравнением $y = ax$, поэтому точка C может быть найдена как решение системы $y = ax$, $y = x^2 + k(x-a)(x-b)$. Приравнивая правые части, получаем уравнение $x^2 + k(x-a)(x-b) = ax$. Одно из решений этого уравнения $x = a$, поэтому второе по теореме Виета равняется $kb/(1+k)$; подставляя это выражение в первое уравнение, получаем $y = kab/(1+k)$. Заметим, что последнее выражение симметрично относительно a и b, поэтому если мы проделаем все те же действия для точек B и D, мы получим тот же самый y. Но тогда ординаты точек C и D равны, откуда и следует, что прямая CD параллельна оси абсцисс.

Замечание. Утверждение задачи является предельным случаем следующего более общего факта (который можно назвать параболическим аналогом *леммы Фусса*). Пусть две параболы G_1 и G_2 (с параллельными осями) пересекаются в точках A и B. Пусть прямая, проходящая через A, пересекает вторично G_i в точке A_i $(i = 1, 2)$, а прямая, проходящая через B, пересекает вторично G_i в точке B_i. Тогда $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

7. Высоты, проведенные из вершин A, B и C остроугольного треугольника ABC, пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, а также пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает описанные окружности треугольников AC_1C_2 и

CA_1A_2 в точках P и Q, отличных от A_1 и C_1. Докажите, что окружность PQB_1 касается прямой AC.

Фролов И. И.



Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Поскольку $\angle C_2AB = \angle C_2CB = 90^\circ - \angle B = \angle HAB$, треугольники C_2AC_1 и HAC_1 симметричны относительно прямой AB. Значит, и окружности C_2AC_1 и HAC_1 симметричны относительно прямой AB. На окружности HAC_1 лежит точка B_1 (так как $\angle AC_1H = \angle AB_1H = 90^\circ$), тогда точка X, симметричная точке B_1 относительно прямой AB, лежит на окружности C_2AC_1. Из симметрии $\angle XC_1A = \angle B_1C_1A$, а кроме того, $\angle AC_1B_1 = \angle ACB = \angle BC_1A_1$ (например, из вписанных четырехугольников ACA_1C_1 и BCB_1C_1, они вписаны в окружности с диаметрами AC и BC). Отсюда $\angle XC_1A = \angle BC_1A_1$, значит, X лежит на прямой A_1C_1. Таким образом, X совпадает с P. Из симметрии точек P и B_1 относительно AB вытекает, что $PB_1 \perp AB$ и $PB_1 \parallel CC_1$. Аналогично доказывается, что $QB_1 \parallel AA_1$.

Для завершения решения достаточно установить равенство $\angle PB_1A = \angle PQB_1$. Из параллельности имеем: $\angle PB_1A = \angle C_1CA$, $\angle PQB_1 = \angle C_1A_1A$. Но $\angle C_1CA = \angle C_1A_1A$ из вписанности четырехугольника AC_1A_1C.

8. На изначально пустую доску 8×8 одна за другой выставляются фишки. Фишку можно ставить только в свободную клетку, которая граничит по стороне хотя бы с тремя свободными клетками. Какое наибольшее число фишек мы можем выставить на доску по таким правилам?

Белов Д. А., Брагин В. А.

Ответ. 36. **Решение.** *Пример* на 36 изображен на рисунке справа. Числами обозначено, в какой последовательности выставляются фишки.

	14		21		22		
1		13		35	23	36	
	15	12	20		24		6
2		11		33	25	34	
	16	10	19		26		5
3		9		31	27	32	
	17	8	18		28		4
		7		29		30	

Оценка. Предположим, мы смогли выставить 37 фишек. Когда мы выставляем фишку в некоторую клетку, у этой клетки есть как минимум 3 соседних клетки без фишек. Закрасим все границы между этими клетками в зелёный цвет (по-другому, можно ввести вспомогательный граф и посчитать его ребра; подробнее смотрите в решении задачи **8-9.7**. Таким образом, каждый раз мы закрашиваем хотя бы 3 отрезка. А после выставления 37 фишек мы закрасим зелёным как минимум 111 отрезков.

Заметим, что каждый отрезок границ между клетками покрашен не более, чем единожды, а так как этих отрезков всего $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$, то не покрашен всего лишь один отрезок.

Далее, в угловых клетках фишка не может появиться, потому что у них всего два соседа. Любая неугловая фишка, примыкающая к стороне квадрата, имеет всего три соседа, поэтому когда в ней появляется фишка, все её соседи свободны. В частности, отсюда следует, что фишки не могут появиться в двух соседних клетках на границе.

Таким образом, у каждой стороны квадрата будет не больше трёх клеток с фишками. Поэтому будет закрашено зелёным не более 6 из 7 отрезков границ в этой линии, то есть непокрашенных отрезков хотя бы 4, что противоречит выводу из пункта 2. Значит, 37 фишек выставить нельзя.