XI Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 1

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

П. А. Кожевников
Д. А. Белов
И. А. Ефремов
К. А. Сухов
М. Сагафиян

13–18 марта 2026 года
г. Майкоп
Республика Адыгея

Юниоры. Первый день, 14 марта

1. *В ряд стоят* 50 *детей. Могло ли оказаться, что среди любых* 5 *подряд стоящих ребят мальчиков на 1 меньше, чем девочек, а также среди любых* 7 *подряд стоящих ребят мальчиков на* 1 *меньше, чем девочек?*

И. А. Ефремов

Ответ: Не могло.

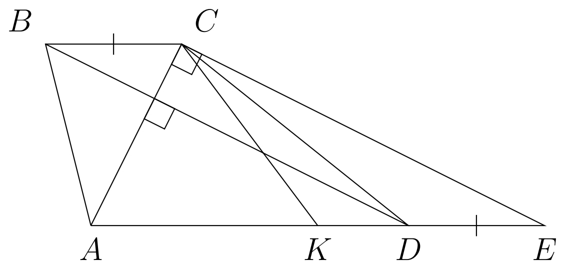
Решение. Предположим, что такая ситуация могла случиться. Из условия следует, что среди любых 5 ребят, стоящих подряд, есть ровно 2 мальчика, а среди любых 7 ребят, стоящих подряд, есть ровно 3 мальчика. Разобьём всех детей на 10 групп по 5 человек, стоящих подряд. Тогда общее количество мальчиков равно $2 \cdot 10 = 20$, так как в каждой группе их ровно 2. С другой стороны, первых 49 детей можно разбить на группы по 7 подряд стоящих человек. Поэтому среди них мальчиков ровно $7 \cdot 3 = 21 > 20$ — противоречие.

Решение 2. Снова предположим, что такая ситуация могла случиться. Посмотрим на 35 ребят, стоящих подряд. Разобьем их на 7 групп по 5 ребят, в каждой из которых ребята стоят подряд. В каждой группе есть ровно 2 мальчика. Поэтому суммарное количество мальчиков среди этих 35 ребят равно $7 \cdot 2 = 14$. С другой стороны, этих же ребят можно разбить на 5 групп по 7 ребят, стоящих подряд. Тогда общее количество мальчиков среди них равно $5 \cdot 3 = 15 \neq 14$ — противоречие.

2. *В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. На основании AD отмечена точка K такая, что $AK + KC = AD + BC$. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C.*

Л. А. Емельянов

Решение. На продолжении отрезка AD за точку D отложим точку E так, что $DE = BC$. Тогда четырёхугольник $BCED$ — параллелограмм, так как его стороны BC и DE равны и параллельны. Тогда $BD \parallel CE$. А значит, в треугольнике ACE выполнено $\angle ACE = 90°$. При этом $KE = AD + DE - AK = AD + BC - AK = KC$, поэтому треугольник ACE — равнобедренный с основанием CE. Тогда $\angle CAK = 90° - \angle AEC = 90° - \angle ECK = \angle ACK$. Значит, треугольник ACK — равнобедренный с основанием AC и $KA = KC$, что и требовалось доказать.



3. *Найдите наименьшее натуральное k такое, что число 100^{100} можно представить в виде произведения 99 натуральных чисел, каждое из которых не больше k.*

Е. В. Бакаев

Ответ: 128.

Решение. *Оценка.* Предположим, что число 100^{100} удалось представить в виде произведения 99 натуральных чисел, каждое из которых меньше 128. Поскольку у числа

100^{100} нет простых делителей, отличных от 2 и 5, каждый из 99 множителей будет иметь вид $2^\alpha \cdot 5^\beta$.

Заметим, что тогда $2^7 = 128 > 2^\alpha \cdot 5^\beta > 2^\alpha \cdot 2^{2\beta} = 2^{\alpha+2\beta}$, откуда следует неравенство $\alpha + 2\beta < 7$, то есть $\alpha + 2\beta \leqslant 6$. Просуммируем такие неравенства по всем 99 множителям, воспользовавшись тем, что суммарные степени вхождения 2 и 5 в произведение равны 200. Получим $200 + 2 \cdot 200 \leqslant 99 \cdot 6$ — противоречие.

Пример. Докажем, что для $k = 128$ требуемое разложение существует. Пусть среди множителей 6 раз встречается число $128 = 2^7$, 79 раз встречается число $100 = 2^2 \cdot 5^2$ и 14 раз встречается число $125 = 5^3$. Тогда суммарная степень вхождения 2 в произведение равна $6 \cdot 7 + 79 \cdot 2 = 200$, а суммарная степень вхождения 5 равна $79 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 200$, что и требовалось.

4. *Паша и Вова играют в игру на клетчатой доске* 12×12. *Ходят по очереди, начинает Паша. В свой ход он может выбрать две клетки, соседние по стороне, в которых на данный момент нет монет, и положить по одной монете орлом вверх в каждую из них. Вова же в свой ход может выбрать две клетки, соседние по диагонали, и переложить все монеты, лежащие в них, решкой вверх. Конец игры объявляется сразу после хода Вовы, если Паша не может сделать свой очередной ход. Какого наибольшего количества монет, лежащих орлом вверх в конце игры, Паша может добиться независимо от действий Вовы?*

А. А. Солынин

Ответ: $\frac{1}{4} \cdot 12^2 = 36$.

Решение. Сразу отметим, что игра всегда закончится, так как Паша может сделать не более $\frac{12^2}{2} = 72$ ходов.

Покажем, как Паше действовать так, чтобы в конце игры осталось не меньше $\frac{1}{4} \cdot 12^2$ монет, лежащих орлом вверх. Пронумеруем все строки числами $1, 2, 3, \ldots, 12$ и разобьём строчки с нечётными номерами на доминошки из двух клеток. Первые 36 ходов будем делать в эти доминошки. Заметим, что каждым ответным ходом Вова сможет уменьшить количество монет, лежащих орлом вверх, не более чем на 1. Поэтому после 36-ого хода Вовы останется не меньше $2 \cdot 36 - 36 = 36$ монет, лежащих орлом вверх. После этого разобьём строчки с чётными номерами на доминошки и будем ходить в них. Тогда после 36 ходов в каждой клетке будет хотя бы одна монета. Следовательно, следующий ход мы сделать уже не сможем и игра закончится. При этом после каждого нашего хода появлялись ровно 2 монеты, лежащие орлом вверх, а после хода Вовы количество таких монет уменьшается не больше чем на 2. Значит, в конце игры по-прежнему будет хотя бы 36 монет, лежащих орлом вверх.

Теперь покажем, как действовать Вове, чтобы в конце игры было заведомо не больше 36 монет, лежащих орлом вверх. Раскрасим клетки доски в шахматную раскраску и разобьём доску на 36 квадратов 2×2. Первые 36 ходов будем делать в пару чёрных клеточек в одном квадратике разбиения. При этом будем выбирать на очередном ходе пару чёрных клеток, в одну из которых ходил Паша перед нами. Если игра закончится не позже, чем через 36 пар ходов, то останется не более 36 монет, лежащих орлом вверх. В противном случае после нашего 36-ого хода на доске останется ровно 36 монет, лежащих орлом вверх. Причем все они будут лежать на белых клетках.

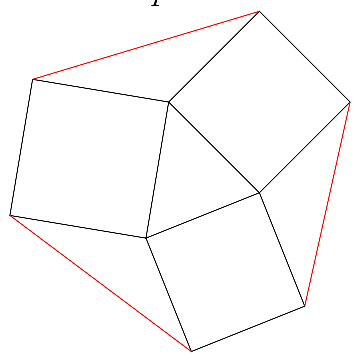
Каждый наш ход, начиная с 37-ого, будем делать в две клетки белого цвета в одном квадрате разбиения. Докажем, что мы сможем сделать это так, чтобы переворачивать сразу две монеты, лежащие орлом вверх. Пусть после 36-ого нашего хода прошло k пар ходов, и теперь Паша совершил свой очередной ход. Пока мы сделали ровно k ходов в белые клетки разных квадратов 2×2. То есть сталось ровно $36-k$ квадратов разбиения, в которых монеты могут лежать орлом вверх на белых клетках. При этом, помимо $2k$ «испорченных» нами ранее белых клеток, есть ещё ровно $36+k+1-2k = 37-k$ белых клеток, монеты в которых лежат орлом вверх. Тогда по принципу Дирихле в одном из оставшихся $36-k$ квадратов 2×2 есть две монеты на белых клетках, лежащие орлом вверх. В этот квадрат и сделаем очередной ход.

Тем самым, после очередной пары ходов количество монет, лежащих орлом вверх, не увеличивается. После первых 36 пар ходов будет ровно 36 монет, лежащих орлом вверх. Поэтому и в конце игры будет не более 36 монет, лежащих орлом вверх.

Сеньоры. Первый день, 14 марта

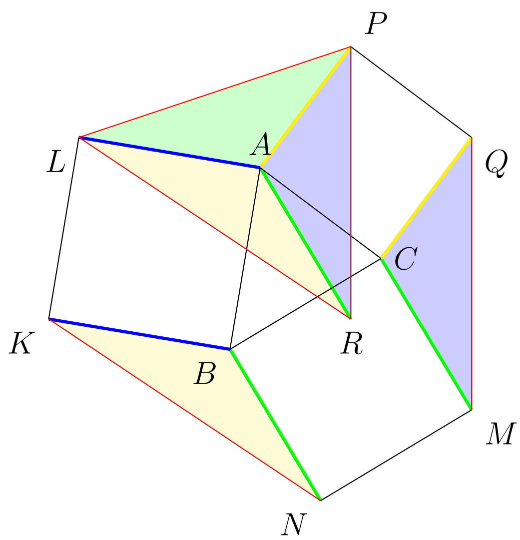
1. *На сторонах треугольника площади 1 во внешнюю сторону построены квадраты. Концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, соединены красными отрезками (см. рис.).*

а) Докажите, что из трёх красных отрезков можно составить треугольник; б) причём площадь этого треугольника равна 3.



Л. А. Емельянов

Решение. Пусть квадраты, построенные на сторонах данного треугольника ABC — это квадраты $ABKL$, $BCMN$, $CAPQ$ (см. рис.)



а) Сделаем параллельный перенос треугольника KBN на вектор $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{KL}$, при этом он перейдёт в треугольник LAR. Аналогично перенесём треугольник QCM на вектор $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{QP}$, при этом он перейдёт в треугольник PAR'. Но $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AR'}$, поэтому точки R и R' совпадают. Тем самым, образуется треугольник PLR, стороны которого равны красным отрезкам PL, $LR = KN$ и $RP = MQ$.

б) Видим, что площадь треугольника PLR складывается из площадей треугольников PAL, KBN, MCQ. Докажем, что площадь любого из них равна площади треугольника ABC.

В самом деле, $2S_{ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$, что равно $AL \cdot AP \cdot \sin\angle LAP = 2S_{PAL}$, поскольку $AL = AB$, $AP = AC$ и $\angle BAC + \angle LAP = 360^\circ - \angle LAB - \angle PAC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$.

2. *Петя расставил по кругу n натуральных чисел. Для каждого числа Вася вычислил произведение этого числа и наибольшего общего делителя двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Все числа, вычисленные Васей, оказались равными. Обязательно ли тогда равны исходные числа, если а) $n = 15$; б) $n = 16$?*

Н. Х. Агаханов

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. а) Контрпримером может являться циклическая последовательность 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1.

б) Занумеруем числа по часовой стрелке (при этом номера i и $i+n$ считаем одинаковыми). Рассмотрим некоторое простое число p и пусть α_i равно степени вхождения этого p в разложение i-го числа. Тогда по условию имеем $\alpha_1 + \min\{\alpha_2, \alpha_3\} = \alpha_2 + \min\{\alpha_3, \alpha_4\} = \ldots = \alpha_n + \min\{\alpha_1, \alpha_2\} = s$. Пусть, $\alpha = \alpha_i$ — максимальное из всех α_i, а β — минимальное из α_{i+1} и α_{i+2}. Тогда $s = \alpha + \beta$, поэтому следующие за β два числа по часовой стрелке равны α (они не меньше α, но и не больше α в силу выбора α). Если $\alpha_j = \alpha_{j+1} = \alpha$, то $\alpha_{j+2} = \beta$, далее $\alpha_{j+3} = \alpha_{j+4} = \alpha$, и т. д. Получаем циклическую последовательность $\alpha, \alpha, \beta, \alpha, \alpha, \beta, \ldots$. Если n не делится на 3, то после прохождения круга мы получим $\alpha = \beta$.

Итак, все степени вхождения α_i равны. Повторяя рассуждение для каждого простого числа p, получаем равенство всех исходных чисел.

3. *Положительные числа a, b и c удовлетворяют равенству*

$$\sqrt{a^2+ab} + b + c = \sqrt{b^2+bc} + c + a = \sqrt{c^2+ca} + a + b.$$

Можно ли сделать вывод, что $a = b = c$?

К. А. Сухов

Ответ: Да.

Решение 1. Пусть b — среднее из чисел, так что $a \geqslant b \geqslant c$ или $c \geqslant b \geqslant a$.

Рассмотрим равенство $\sqrt{a^2+ab} + b + c = \sqrt{b^2+bc} + c + a \iff \sqrt{a^2+ab} - a = \sqrt{b^2+bc} - b \iff \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+ab}+a} = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+bc}+b} \iff \dfrac{\sqrt{a^2+ab}+a}{a} = \dfrac{\sqrt{b^2+bc}+b}{c} \iff \sqrt{1+\frac{b}{a}} + 1 = \sqrt{\frac{b^2}{c^2}+\frac{b}{c}} + \frac{b}{c}$.

1) Если $a \geqslant b \geqslant c$, имеем $\sqrt{1+\frac{b}{a}} + 1 \leqslant \sqrt{1+1} + 1$ и $\sqrt{\frac{b^2}{c^2}+\frac{b}{c}} + \frac{b}{c} \geqslant \sqrt{1+1} + 1$. Значит, оба неравенства должны обращаться в равенство, что возможно лишь при $a = b$ и $b = c$.

2) Если же $a \leqslant b \leqslant c$, то $\sqrt{1+\frac{b}{a}}+1 \geqslant \sqrt{1+1}+1$ и $\sqrt{\frac{b^2}{c^2}+\frac{b}{c}}+\frac{b}{c} \leqslant \sqrt{1+1}+1$. Снова оба неравенства должны обращаться в равенство, что возможно лишь при $a = b$ и $b = c$.

Решение 2. Пусть $\sqrt{a^2+ab}+b+c = a+b+c+x$, тогда $\sqrt{a^2+ab} = a+x$. Возводя в квадрат, получаем $a^2+ab = a^2+2ax+x^2$, откуда $ab = x^2+2ax$. Аналогично, проделав те же выкладки для второго выражения, имеем $bc = x^2+2bx$. Вычитая второе равенство из первого, находим $ab-bc = 2ax-2bx$, то есть $b(a-c) = 2x(a-b)$ (*). Предположим теперь, что a является средним по величине среди чисел a, b, c. Тогда левая и правая части (*) имеют строго противоположные знаки или оба равны 0, и равенство возможно лишь при $a = b = c$.

4. *В строку выписаны n натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n. За каждый шаг числа одновременно меняются по следующему правилу: вместо i-го числа записывается количество индексов j таких что $a_j = a_i$, увеличенное на i. (Например, из последовательности $1, 1, 4, 1, 4, 2, 1, 3$ получается $5, 6, 5, 8, 7, 7, 11, 9$.) Докажите, что через некоторое время числа в строке перестанут меняться.*

Morteza Saghafian

Решение 1. Докажем утверждение индукцией по n.

База $n = 1$. Единственный элемент строки после каждого шага становится равным 2, следовательно, перестанет меняться после первого же шага.

Переход $n \to n+1$.

Пусть m — максимальный индекс такой, что $a_m = a_1$. Заметим, что если $m > 1$, то на следующем шаге имеем (здесь помечаем штрихом число в следующей последовательности) $a'_1 \leqslant m+1$; также $a'_i > m+1 \geqslant a'_1$ для индексов $i > m$; $a'_m \geqslant m+2 > a_1$, поскольку в последовательности есть не менее 2 копий a_m: само a_m и a_1 $(m > 1)$. Получается, что в строке после преобразования выполнено $a'_i \neq a'_1$ при $i \geqslant m$, т. е. новый максимальный индекс m' будет меньше m, а значит m убывает на каждом шаге, если не равен 1. Значит, не более чем через n шагов m станет равным 1, т. к. изначально $m \leqslant n+1$. После ещё одного шага a_1 становится равным $1+1 = 2$ и после этого перестаёт меняться, т. к. $a'_i \geqslant i+1 > 1+1 = a'_1$ для $i > 1$, т. е. на каждом ходу a_1 будет продолжать быть единственным числом 2 в строке.

После стабилизации a_1 на значении $a_1 = 2$ процесс изменения строки $(b_1, b_2, \ldots, b_n) := (a_2-1, a_3-1, \ldots, a_{n+1}-1)$ полностью подчиняется правилам из условия задачи (так как a_1 не является копией ни одного другого a_i, и что $b_i = b_j$ равносильно $a_{i+1} = a_{j+1}$). Таким образом, $a_2, \ldots, a_n$ стабилизируются с какого-то момента по предположению индукции (примененной к строке $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$). Тем самым переход доказан, что завершает решение.

Решение 2. После каждого шага (начиная с первого) мы получаем последовательность из n натуральных чисел, каждое из которых не превосходит $2n$. Таких последовательностей конечное множество, значит какая-то последовательность P_1 повторится дважды. Пусть P_1, P_2, …, P_k — последовательности, которые получаются до следующего появления P_1 (так что $P_{k+1} = P_1$). Далее P_1, P_2, …, P_k будет повторяться периодично (каждая за шаг получается из предыдущей в цикле).

Для каждой из последовательностей P_i найдём наибольшее количество встречающихся в ней копий, и пусть m — наибольшее из этих количеств. Тогда в каждой из последовательностей P_1, P_2, …, P_k каждое число превосходит свой номер не более чем на m (иначе в предыдущей последовательности число с этим номером повторялось бы больше m раз).

В частности, если $m = 1$, то каждая P_i совпадает с последовательностью $(2, 3, \ldots, n+1)$ которая, очевидно будет повторяться. Предположим далее, что $m \geqslant 2$.

Среди последовательностей P_1, P_2, …, P_k рассмотрим последовательности с наибольшим количеством копий (m) некоторого числа x, а среди них выберем ту, в которой x минимально. Пусть для определённости, выбрана последовательность P_t.

Посмотрим на последовательность $P_t = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, а также на последовательность $P_{t-1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (индексы t и $t-1$ берутся по модулю k, так что за шаг из P_{t-1} получается P_t).

Так как в P_t есть m копий числа x, положим $b_{i_1} = \ldots = b_{i_m} = x$ для некоторых индексов $i_1 < \ldots < i_m$. Далее $x = b_{i_m} \geqslant i_m + 1 \geqslant i_{m-1} + 2 \geqslant \ldots \geqslant i_1 + m$. Получаем $x = b_{i_1} \geqslant i_1 + m$. Но как мы отмечали $b_{i_1} - i_1 \leqslant m$. Следовательно, в предыдущей цепочке неравенств все они должны обращаться в равенства: $x = b_{i_m} = i_m + 1 = = i_{m-1} + 2 \ldots = i_1 + m$, что равно b_{i_1}.

Последнее равенство $x = i_1 + m$ означает, что a_{i_1} повторено m раз в последовательности P_{t-1}. Значит $a_{i_1} \geqslant x$ (согласно выбору x). При этом строгое равенство $a_{i_1} > x$ невозможно (иначе $a_{i_1} - i_1 > m$).

Итак, $a_{i_1} = i_1 + m = x$, и x повторяется m раз в последовательности P_{t-1}. Но $a_j = x$ невозможно при $j < i_1$, иначе $a_j - j > m$. Далее заметим, что числа $a_{i_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_1+m-1}$ различны, так как если бы два из них были равны, то соответствующие числа последовательности P_t были бы различны (к номеру числа прибавилось бы одно и то же количество копий), но как мы помним, $b_{i_1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_{i_1+m-1}$ равны. Значит среди чисел $a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_1+m-1}$ нет числа x. Наконец, $a_j > x = a_{i_1} + m$ при $j \geqslant i_1 + m = x$. Таким образом, мы поняли, что x присутствует ровно один раз в P_t. Противоречие.