XI Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 13–18 марта 2026 года

Юниоры. Первый день, 14 марта

1. В ряд стоят 50 детей. Могло ли оказаться, что среди любых 5 подряд стоящих ребят мальчиков на 1 меньше, чем девочек, а также среди любых 7 подряд стоящих ребят мальчиков на 1 меньше, чем девочек?

2. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. На основании AD отмечена точка K такая, что $AK+KC = AD+BC$. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C.

3. Найдите наименьшее натуральное k такое, что число 100^{100} можно представить в виде произведения 99 натуральных чисел, каждое из которых не больше k.

4. Паша и Вова играют в игру на клетчатой доске 12×12. Ходят по очереди, начинает Паша. В свой ход он может выбрать две клетки, соседние по стороне, в которых на данный момент нет монет, и положить по одной монете орлом вверх в каждую из них. Вова же в свой ход может выбрать две клетки, соседние по диагонали, и переложить все монеты, лежащие в них, решкой вверх. Игра заканчивается, когда Паша не может сделать очередной ход. Какого наибольшего количества монет, лежащих орлом вверх в конце игры, он может добиться независимо от действий Вовы?

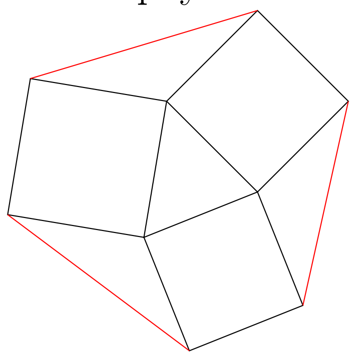
XI Кавказская математическая олимпиада
г. Майкоп, 13–18 марта 2026 года

Сеньоры. Первый день, 14 марта

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

1. На сторонах треугольника площади 1 во внешнюю сторону построены квадраты. Концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, соединены красными отрезками (см. рис.).

а) Докажите, что из трёх красных отрезков можно составить треугольник; б) причём площадь этого треугольника равна 3.



2. Петя расставил по кругу n натуральных чисел. Для каждого числа Вася вычислил произведение этого числа и наибольшего общего делителя двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Все числа, вычисленные Васей, оказались равными. Обязательно ли тогда равны исходные числа, если а) $n = 15$; б) $n = 16$?

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют равенству

$$\sqrt{a^2 + ab} + b + c = \sqrt{b^2 + bc} + c + a = \sqrt{c^2 + ca} + a + b.$$

Можно ли сделать вывод, что $a = b = c$?

4. В строку выписаны n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За каждый шаг числа одновременно меняются по следующему правилу: вместо i-го числа записывается количество индексов j таких что $a_j = a_i$, увеличенное на i. (Например, из последовательности $1, 1, 4, 1, 4, 2, 1, 3$ получается $5, 6, 5, 8, 7, 7, 11, 9$.) Докажите, что через некоторое время числа в строке перестанут меняться.