XI Кавказская математическая олимпиада

Решения заданий
День 2

П. А. Кожевников
Д. А. Белов
И. А. Ефремов
К. А. Сухов
М. Сагафиян

13–18 марта 2026 года
г. Майкоп
Республика Адыгея

Юниоры. Второй день, 15 марта

5. *Найдите наибольшее натуральное число, состоящее из различных ненулевых цифр, такое, что произведение любых двух его соседних цифр является составным числом.*

И. Д. Бейлин, Е. Д. Уткин, Д. А. Белов

Ответ: 987653241.

Решение. Легко проверить, что число 987653241 удовлетворяет требованиям задачи. Заметим, что в десятичной записи нашего числа может быть не более 9 цифр. Предположим, что есть такое натуральное число, большее 987653241. Тогда первые 5 его цифр обязаны быть равны 98765 именно в таком порядке. При этом в числе должны присутствовать все ненулевые цифры ровно 1 раз. В частности в записи числа должна встречаться цифра 1. При этом ни с 5, ни с 2, ни с 3, она рядом стоять не может. Поэтому она обязана стоять в конце числа, а перед ней цифра 4. Тогда наше число будет не больше 987653241 — противоречие с нашим предположением.

6. *Маша выписала в тетрадку* 2026 *различных положительных чисел. Она считает пару чисел a и b, записанных в тетрадке, хорошей, если число $\frac{2026-ab}{a+b}$ равно одному из* 2024 *оставшихся чисел. Могло ли оказаться, что среди пар выписанных чисел есть ровно* 2026 *хороших?*

И. А. Ефремов

Ответ: Не могло.

Решение. Предположим, что такое могло случиться. Рассмотрим хорошую пару чисел a и b. Пусть $c = \frac{2026-ab}{a+b}$. По условию, число c есть в тетрадке и не равно a и b. Домножая полученное равенство на $a+b$, после переноса ab в левую часть равенства получим $ab+bc+ca = 2026$. Тогда $b(a+c) = 2026 - ac$, откуда $b = \frac{2026-ac}{a+c}$. Значит, пара чисел a и c также является хорошей. Аналогично пара чисел b и c также является хорошей. Тем самым мы сопоставили хорошей паре чисел a, b ещё две хорошие пары b, c и c, a, где $c = \frac{2026-ab}{a+b}$. При этом, если действовать по тому же правилу, хорошей паре b, c будут сопоставлены пары c, a и a, b. Аналогично с хорошей парой c, a. Поэтому все хорошие пары чисел можно разбить на тройки такого вида. Значит, общее количество хороших пар чисел делится на 3. Но 2026 на 3 не делится — противоречие.

7. *В клетчатом квадрате 8×8 отметили все узлы сетки, всего* 81 *точку. Игорь соединил некоторые пары отмеченных точек отрезками так, что получился* 81*-угольник. Докажите, что центр одной из клеток квадрата 8×8 оказался на границе этого* 81*-угольника.*

И. А. Ефремов

Решение. Покрасим узлы сетки в шахматном порядке так, что количество чёрных узлов будет на 1 больше, чем количество белых. Тогда при обходе 81-угольника встретится сторона, у которой оба конца — чёрные.

Итак, у нас есть сторона, соединяющая узлы A и B одного цвета. Введём координаты $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ (согласованные с нашей сеткой). Тот факт, что A и B одного цвета означает, что $x_a - x_b$ и $y_a - y_b$ одной чётности.

Если обе разности чётны, то x_a+x_b и y_a+y_b также чётны. Тогда середина M отрезка AB имеет координаты $(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2})$, а значит, является узлом. Получаем, что вершина

M нашего многоугольника лежит на его стороне AB, что невозможно.

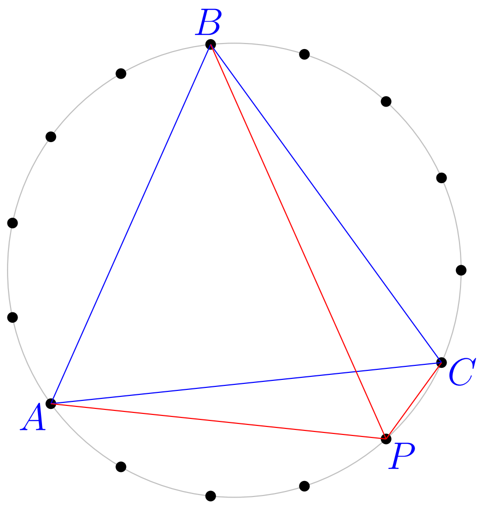
Значит, обе разности $x_a - x_b$ и $y_a - y_b$ нечётны. Тогда и суммы $x_a + x_b$ и $y_a + y_b$ нечётны. В таком случае середина M отрезка AB имеет координаты вида $(k+\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2})$ для некоторых целых k и ℓ. Значит, M совпадает с центром одной из клеток квадрата и лежит на стороне многоугольника, что и требовалось доказать.

8. *Дан правильный* 111*-угольник, длина стороны которого равна* 1*. Докажите, что в нём найдутся две диагонали, длины которых отличаются на* 1.

Е. В. Бакаев

Решение. Используем следующее известное *утверждение.* Пусть ABC — правильный треугольник, а точка P выбрана на меньшей дуге CA окружности (ABC). Тогда $PB = PA + PC$.

Доказательство утверждения. Отложим на продолжении отрезка PA за точку A точку D так, что $AD = CP$. Из вписанности четырехугольника $ABCP$ получаем $\angle DAB = 180^\circ - \angle PAB = \angle PCB$. Тогда треугольники DAB и PCB равны по двум сторонам и углу между ними: $DA = PC$, $AB = CB$ и $\angle DAB = \angle PCB$. Значит, $DB = BP$ и треугольник DBP — равнобедренный с основанием DP. Но $\angle DPB = \angle APB = \angle ACB = 60^\circ$. Поэтому треугольник DBP — правильный и $BP = PD = PA + PC$.



Вернемся к решению задачи. Пусть $A_1A_2\ldots A_{3k}$ — наш правильный 111-угольник ($k = 37$). Тогда $A = A_k$, $B = A_{2k}$, $C = A_{3k}$ — вершины правильного треугольника, а точка $P = A_1$ лежит на меньшей дуге CA его описанной окружности. Тогда, согласно утверждению, $PB = PA + PC$. Но $PC = 1$, поскольку PC — это сторона нашего 111-угольника. Значит $PB - PA = 1$, следовательно, PB и PA — нужные нам диагонали.

Сеньоры. Второй день, 15 марта

5. *Существуют ли непостоянные линейные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *такие, что уравнение* $f(x)g(x+1) + f(x+1)g(x) = 0$ *не имеет вещественных корней?*

И. А. Ефремов

Ответ: Не существуют.

Решение. Предположим противное, и пусть $f(x) = ax + c$, $g(x) = bx + d$, причём $a, b \neq 0$. Наше уравнение $f(x)g(x+1) + f(x+1)g(x) = 0$ имеет вид $(ax+c)(b(x+1)+d) + (a(x+1)+c)(bx+d) = 0$.

Положим $p = c/a$, $q = d/b$. Поделив на ab, получим более простой вид $F(x) = 0$, где $F(x) = (x+p)(x+1+q) + (x+p+1)(x+q)$.

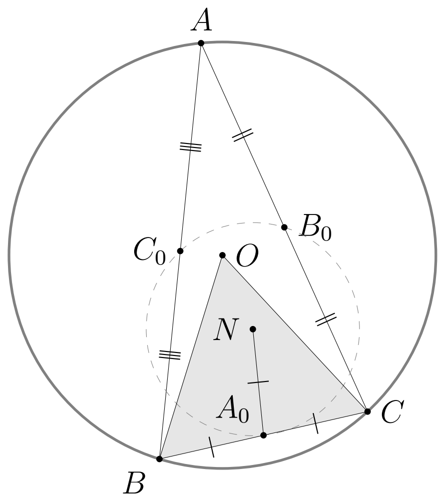
Заметим, что $F(-p) = 0 + 1 \cdot (-p+q) = q - p$ и аналогично $F(-q) = p - q$. Если $p = q$, то $-p$ — корень уравнения $F(x) = 0$. Иначе видим, что (квадратичная) функция F принимает значения разных знаков, а значит, имеет корень.

Замечание. Конечно, наличие корней можно доказать непосредственно — поняв, что дискриминант квадратного трёхчлена $(x+p)(x+1+q) + (x+p+1)(x+q)$ неотрицательный (на самом деле $D/4 = (p-q)^2 + 1$).

6. *В треугольнике ABC угол BAC равен $30°$. Пусть N — центр окружности, проходящей через середины отрезков AB, BC и CA. Докажите, что $\angle BNC = 90°$.*

Л. А. Емельянов

Решение. Пусть C_0, A_0, B_0 — середины отрезков AB, BC, CA соответственно. Достаточно понять, что $NA_0 = BC/2$, т. е. что в треугольнике BNC медиана, проведённая из N, равна половине противоположной стороны.



Пусть описанная окружность (ABC) имеет центр O и радиус R. Поскольку $\angle BOC = 2\angle BAC = 60°$ и $OB = OC = R$, треугольник BOC — равносторонний, значит $BC = R$.

С другой стороны, NA_0 — радиус описанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$, который подобен треугольнику ABC с коэффициентом $1/2$, поэтому $NA_0 = R/2$.

Итак, $NA_0 = R/2 = BC/2$, что мы и хотели доказать.

Замечание. Точка N известна как центр окружности девяти точек (проходящей через середины сторон, основания высот и через середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами). Известно, что N является серединой отрезка OH (где H — ортоцентр, а O — как и ранее, центр описанной окружности). Это описание можно использовать для другого решения, схему которого приводим ниже,

Зафиксируем точки B и C, а точке A позволим двигаться по фиксированной дуге (так что $\angle BAC = \alpha$ постоянен). Несложно понять, что тогда ортоцентр H движется по фиксированной окружности Ω — окружности, симметричной окружности (ABC) относительно BC. При гомотетии с центром O и коэффициентом $1/2$ точка H перейдёт в N. Следовательно, N лежит на окружности ω, гомотетичной Ω с центром O и коэффициентом $1/2$. Можно проверить, что в случае $\alpha = 30°$ (а также $\alpha = 150°$) полученная окружность ω совпадает с окружностью, построенной на BC как на диаметре. (Можно также показать, что при других значениях α окружность ω не проходит через

B и C, поэтому угол BNC не будет постоянным).

7. *Натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{120}$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите наибольшее возможное количество пар индексов $1 \leqslant i < j \leqslant 120$ таких, что a_j делится на a_i.*

П. А. Кожевников

Ответ: $482 = \sum\limits_{i=2}^{120} \lfloor \frac{120}{i} \rfloor$.

Решение. Положим $n = 120$.

Оценка. Для данного i оценим количество индексов $j \leqslant n$, для которых $a_j \vdots a_i$. Пусть $i = j_1 < j_2 < \ldots < j_s$ — все такие индексы. Заметим, что $a_i > (i-1)d$. Поскольку $a_{j_{t+1}} - a_{j_t} = (j_{t+1} - j_t)d \vdots a_i$, получаем $(j_{t+1} - j_t)d \geqslant a_i > (i-1)d$, откуда (сокращая на d) $j_{t+1} - j_t > i - 1$, а значит $j_{t+1} - j_t \geqslant i$. Отсюда последовательно получаем неравенства $j_1 \geqslant i$, $j_2 \geqslant 2i$, $\ldots$, $j_s \geqslant si$. Так как $j_s \leqslant n$, имеем $si \leqslant n$, откуда $s \leqslant \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$. Складываем эти оценки по всем $i = 1, 2, \ldots, n$ и учитываем, что мы посчитали n пар совпадающих индексов (пары i, i). Окончательно, интересующее нас количество пар индексов не превышает $\sum\limits_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor - n = \sum\limits_{i=2}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$.

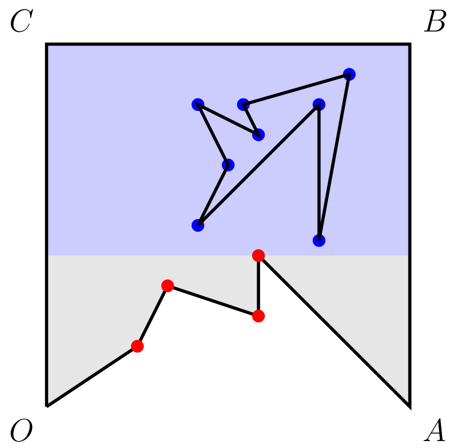
Пример. Рассмотрим числа $1, 2, 3, \ldots, n$. Легко видеть, что в этом примере действительно $\sum\limits_{i=2}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ нужных нам пар (поскольку все неравенства, используемые в оценке, обращаются в равенство).

Замечание. Можно пробовать оценить количество искомых пар $i < j$ с фиксированным частным $k = a_j/a_i$. Однако (без дополнительных соображений) это не всегда даёт точную оценку. Например, для $n = 120$ в оптимальном примере $(1, 2, \ldots, 120)$ частное $k = 11$ встречается для 10 пар, а скажем, в прогрессии $9, 19, 29, \ldots, 1199$ частное 11 встречается в 11 парах.

8. *На плоскости отмечены 4 вершины квадрата и 2026 точек внутри него. Никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что существуют два 1015-угольника с вершинами в отмеченных точках, один из которых лежит строго внутри другого.*

С. Г. Волчёнков

Решение. Введём координаты так, чтобы наш квадрат K имел вершины $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$. Пусть $A_1, \ldots, A_{2026}$ — остальные 2026 отмеченных точек, упорядоченные по возрастанию ординаты. (Поскольку никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой, ординаты могут быть равны не более чем у двух отмеченных точек.) Покрасим красным точки $A_1, \ldots, A_{1011}$, а остальные 1015 отмеченных точек $A_{1012}, \ldots, A_{2026}$ — синим.



Красные точки переобозначим $B_1, \ldots, B_{1011}$ в порядке возрастания абсциссы. Тогда пусть границей внешнего многоугольника P_1 будет непересекающаяся замкнутая ломаная $ABCOB_1B_2 \ldots B_{1011}A$. Эта ломаная несамопересекающаяся, так как звенья AB, BC, CO лежат на выпуклой оболочке, а векторы $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{B_{1010}B_{1011}}$, $\overrightarrow{B_{1011}A}$ имеют неотрицательную абсциссу (направлены вправо), и среди них нет двух подряд идущих векторов, параллельных оси Oy.

Все синие точки лежат в прямоугольнике Π, образованном прямыми AB, BC, CO и горизонтальной прямой ℓ, проходящей через верхнюю красную точку (точку A_{1011}). При этом на границе этого прямоугольника лежит не более одной синей точки (возможно, лишь A_{1012}), а весь прямоугольник Π принадлежит многоугольнику P_1, значит выпуклая оболочка всех синих точек лежит строго внутри P_1.

Остаётся соединить все синие точки замкнутой несамопересекающейся ломаной (она и будет границей искомого многоугольника P_2). Как известно, это сделать можно. Например, такой ломаной будет являться замкнутая ломаная, имеющая наименьшую длины среди всех замкнутых ломаных с вершинами во всех синих точках. (Если бы у этой ломаной были бы пересекающиеся звенья XY и ZT, то можно было бы их заменить на одну из пар XZ, YT и XT, YZ и получить замкнутую ломаную меньшей длины.)

Замечание. Сходным методом можно доказать следующее утверждение, обобщающее утверждение задачи. Пусть на плоскости отмечено n точек общего положения, причём их выпуклая оболочка представляет собой m-угольник. Тогда для любого $k \geqslant m$ существуют k-угольник и $(n-k)$-угольник с вершинами в отмеченных точках такие, что второй лежит внутри первого.